第 L 章　線形代数

本書は内容をできるだけ本の中に閉じることを目標としていたため，線形代数に関しても掲載する予定だったが，ページ数制限のため別資料として Web 上にアップすることにした。大学 1 年次に勉強する基本的な内容であるが，一度目を通してから，本書の第 2 章以降を読むことを勧める。

L.1　線形空間とその公理

線形代数

- 代数学：加算や乗算のような演算が定義された集合の要素に対して，具体的な数の代わりに，変数を使ってその性質を議論する学問 (数の代わりなので「代数」と呼ばれる)。
- 体とは，有理数 Q，実数 R，複素数 C などの加減乗除ができる数の集合のこと。
- 線形代数とは，集合 X と体 K に関して，次の 2 つの演算
  - X の 2 つの任意の要素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対する和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ (ベクトル和)
  - X の任意の要素 $\boldsymbol{x}$ と K の任意の要素 α に対する積 $\alpha\boldsymbol{x}$ (スカラー積)

  が定義されていて，後に述べる**線形代数の公理**を満たすとき，その 2 つの演算からなる代数のことである。
- 体 K 上の線形空間 X とは，K に関して線形代数が定義できる集合 X のことである。
- ベクトルとスカラー
  - ベクトル：X の要素：$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ と表記
  - スカラー：K の要素：α，β と表記
- 線形代数では，ベクトルとベクトルの積は，定義されていなくてもよい。
- 線形空間をベクトル空間とも呼ぶ。

例えば，整数ならば「たし算」,「ひき算」,「かけ算」が定義できる。実数ならば 0 で割ること以外に対して，割り算も定義できる。このように，集合に演算が定義できるとき，具体的な数ではなく，変数を使って演算や方程式の解の性質など議論する学問が代数学である。

体とは，実数や複素数と同じく，0 で割ること以外の加減乗除が定義できる集合を意味する。線形代数では，ある体を使って定義したベクトルの演算を議論していく。例えば，空間の次元，線形

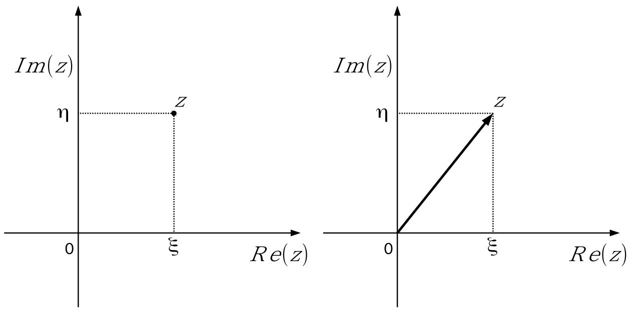

図 L.1: 複素数

変換，その逆変換，固有値・固有ベクトルなどを論じる。線形代数は線形システムを扱うために必要不可欠なものである。

複素数

- i：虚数単位
- 複素数 z は，2 つの実数 ξ, η に対して，$z = \xi + i\eta$ で定義できる。
  ξ，η は，それぞれ，z の実部と虚部と呼ばれる。$Re(z)$ で実部を $Im(z)$ で虚部を表す。
  したがって，$z = Re(z) + iIm(z)$ が成立する。
- $z = \xi + i\eta$ の複素共役 $\bar{z}$ は，$\bar{z} \equiv \xi - i\eta$ として定義される。
- $z = \xi + i\eta$ の絶対値 $|z|$ は，$|z| \equiv \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ として定義される。
- 代数学の基本定理：任意の N 次多項式は，重複を含め N 個の複素数解を持つ。

念のため，複素数に関しておさらいする。虚数単位 i は $i^2 = -1$ となる数として定義される。虚数単位に 0 でない実数をかけたものを純虚数と呼ぶ。複素数は実数と純虚数の和からなるものである。それぞれを，その複素数の実部と虚部と呼ぶ。複素数を図示するときには，図 L.1 のように，実部を横軸 (実軸)，虚部を縦軸 (虚軸) にとった，複素数平面と呼ばれる 2 次元平面上の点またはベクトルとして表す。一般に，実軸からの角度が重要である時にはベクトルで表すことが多い。

$z_1 = \xi_1 + i\eta_1$ と $z_2 = \xi_2 + i\eta_2$ の加減乗除は,

$$z_1 + z_2 = (\xi_1 + \xi_2) + i(\eta_1 + \eta_2) \tag{L.1}$$

$$z_1 - z_2 = (\xi_1 - \xi_2) + i(\eta_1 - \eta_2) \tag{L.2}$$

$$z_1 z_2 = (\xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2) + i(\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2) \tag{L.3}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2) + i(-\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2)}{\xi_2^2 + \eta_2^2} \tag{L.4}$$

となる。複素数 z の絶対値 $|z|$ は，複素平面での原点 0 から z までの距離を表している。すべての N 次方程式は複素数で解を探せば，重複を含めて N 個の解を持つことが示されている。

ベクトル和とスカラー積の演算が線形代数となるためには，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ と任意のスカラー $\alpha, \beta \in K$ に対して，次の条件を満たす必要がある。

線形代数の公理

ベクトル和とスカラー積が線形代数をなすためには，次の条件を満たさなくてはいけない。

1. $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$　(交換則)
2. $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$　(結合則)
3. $\mathbf{0}\in X$ が存在して，$\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}$ が成立する。　(ゼロベクトル)
4. $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$　(分配則)
5. $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x}=\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$　(分配則)
6. $(\alpha\beta)\boldsymbol{x}=\alpha(\beta\boldsymbol{x})$　(結合則)
7. $0\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, $1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$

$\mathbf{0}$ は，ベクトルの加法の単位元になる。

線形空間の代表例は，後に示す実数または複素数を複数個並べたベクトルからなる集合である。2 つの数を並べたベクトルからなる線形空間に関しては，高等学校の授業でも習っている。そのようなものの他にも，時間信号のような関数がなす集合も線形空間と考えることができる。このような線形空間は関数空間と呼ばれる。関数空間は，フーリエ級数やフーリエ変換における和の収束や積分を議論するために非常に重要である。また，量子力学でも粒子状態などが関数空間のベクトルで表され，運動量の計測などがそのベクトルに対する線形作用素によって定義される。その他にも，定規とコンパスで角の 3 等分線が作図できないことなども，有理数を体 K とした，線形空間の次元を使って証明されている。

1 次独立

- M 個のベクトル $\{\boldsymbol{x}_m\}_{m=1}^{M}$ が「1 次独立」あるいは「線形独立」であるとは，M 個のスカラー $\{\alpha_m\}_{m=1}^{M}$ に対して，
$$\sum_{m=1}^{M}\alpha_m\boldsymbol{x}_m=\mathbf{0} \tag{L.5}$$
が成立するならば，α_m が全て 0 になることである。
- 1 次従属あるいは線形従属とは，1 次独立でないことを意味する。
- M 個のベクトル $\{\boldsymbol{x}_m\}_{m=1}^{M}$ の「1 次結合」あるいは「線形結合」とは，ある M 個のスカラー $\{\alpha_m\}_{m=1}^{M}$ に対する次の和のことである。
$$\sum_{m=1}^{M}\alpha_m\boldsymbol{x}_m \tag{L.6}$$

1 次 (線形) 独立とは，$\{\boldsymbol{x}_m\}_{m=1}^{M}$ のどのベクトル $\boldsymbol{x}_m$ も，他のベクトルの 1 次結合で表せないことと同じである。逆に，1 次 (線形) 従属とは，$\{\boldsymbol{x}_m\}_{m=1}^{M}$ のあるベクトル $\boldsymbol{x}_m$ が，他のベクトルの

1 次結合で表せることと同じである。

基底と次元

- 線形空間 X の「次元」が N であるということは，独立な N 個のベクトルが存在して，そのベクトルの 1 次結合によって，X の全てのベクトルを表すことができることである。
- 基底：上記の N 個のベクトルの組のこと

本書で用いる，次のような N 個の実数または複素数を並べたベクトルからなる N 次元線形空間を考える。

N 次元実 (複素) ベクトル空間

- 記号：
  - R^N：N 次元実ベクトル空間
  - C^N：N 次元複素ベクトル空間
- R^N または C^N：N 個の実数または複素数を並べたベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \tag{L.7}$$

  からなる線形空間のことである。
- x_i をベクトル $\boldsymbol{x}$ の第 i 成分または第 i 要素と呼ぶ。

R^N または C^N では，ベクトル**和**を次のように定義する。

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_N+y_N \end{pmatrix} \tag{L.8}$$

そして，スカラー**積**を，

$$\alpha\boldsymbol{x} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_N \end{pmatrix} \tag{L.9}$$

と定義する。

このように定義すれば，線形代数の公理を満たすことは明らかである。このとき，ゼロベクトルを，

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{L.10}$$

と定義する。こうすれば，線形代数の公理の条件 3

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \tag{L.11}$$

を満たす。なぜならば，

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 0 \\ x_2 + 0 \\ \vdots \\ x_N + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \tag{L.12}$$

が成立するからである。他の性質も同様に成立することを確かめてほしい。

N 次元線形空間はこのようなものばかりではなく，例えば，次数が $N-1$ 以下の多項式の全体なども N 次元線形空間になる。しなしながら，任意の N 次元線形空間は，そのスカラーを N 個並べた，上で示した線形空間と同一視することができる。

上のように，列ベクトル (値を縦に並べる方法) で直接表記すると，表記のために無駄にスペースを使うため，行ベクトル (値を横に並べる方法) とベクトルの転置 $\cdot^T$ の記号を使って，

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots x_N)^T \tag{L.13}$$

によって列ベクトルを表す。行ベクトルを転置しているため，上の式は列ベクトルとなる。

ある 1 つの成分が 1 で，残りの成分が 0 となる N 個のベクトルの組がこの空間の基底となるので，N 次元であることがわかる。すなわち，R^N や C^N の次元 N も，次元の定義に基づいていることがわかる。

ベクトルのノルム

- 体 K では任意の元 α に対してその絶対値 $|\alpha|$ が定義できるものとする。
- ノルムは，基本的にはベクトル $\boldsymbol{x}$ から実数 $||\boldsymbol{x}||$ への写像である。
- その写像がノルムとなるためには，以下のノルムの公理を満たさなくてはいけない。
  任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ と $\alpha \in K$ に対して，

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ であり，$\|\boldsymbol{x}\| = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる.
2. $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$.
3. $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

が成立する。

- ユークリッド (Euclid) ノルムとは，R^N や C^N で定義される以下のノルムのことである。

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2} \tag{L.14}$$

ノルムの計算において，得られた値 $||\boldsymbol{x}||$ はベクトルの大きさ (長さ) を表すと考えることができる。本書ではユークリッドノルム (式 (L.14)) の定義以外は用いないが，例えば,

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|$$

は，ノルムの性質を満たしている。

ノルムで最も大切な性質は，$\|\boldsymbol{x}\| = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が成立することである。同じことではあるが, $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が成立することである。この性質により，ノルムの値を評価することによって，ベクトル自体を評価することができる。

内積

- 体 K には任意の元 α に対してその共役 $\overline{\alpha}$ が定義できるものとする (ある数の共役は，実数の場合はその数自身であり，複素数の場合は複素共役である)。
- 内積は，基本的には 2 つのベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ からスカラー $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ への写像である。
- その写像が内積となるためには，以下の性質を満たさなくてはいけない。
  任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathcal{X}$ と $\alpha \in K$ に対して，

  1. $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \geq 0$ であり，$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる.
  2. $\langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z} \rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \rangle$.
  3. $\langle \alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$.
  4. $\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle = \overline{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle}$.

  が成立する。
- ユークリッド (Euclid) 内積とは，R^N や C^N で定義される以下の内積のことである。

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{y_i} \tag{L.15}$$

- 内積から誘導されるノルムはつぎのように定義される。

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} \tag{L.16}$$

ユークリッド内積は，最も基本的な内積である。R^N の場合は，共役を使う必要がなく，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \tag{L.17}$$

と書くことができる。ユークリッド内積が，内積の公理を満たすことは明らかである。ユークリッド内積から誘導されるノルムは，ユークリッドノルムになる。

$$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2} \tag{L.18}$$

コーシ・シュワルツ (Cauchy-Schwarz) の不等式

- 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に対して，

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\| \, \|\boldsymbol{y}\| \tag{L.19}$$

  が成立する。
- 等号が成立する条件は，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が同じ方向を向いていることである。すなわち，あるスカラー α に対して，$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y}$ または $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$ となるときである。

内積は 2 つのベクトルの大きさと，それらの方向の一致度を掛けたものである。幾何学的に言えば，2 つのベクトルのノルムと，ベクトルのなす角の余弦 (cos) を掛けたものである。θ を $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角とすれば，

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\| \cos\theta \tag{L.20}$$

となる。また，ベクトルのノルムを固定すれば，2 つのベクトルの向きが同じ場合に内積の値は最大になる。これを一般化したものが，上のコーシー・シュワルツの不等式である。

コーシー・シュワルツの不等式の等号が成立する条件は，方向が同じ場合である。言い換えれば，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が 1 次従属の場合である。「または」で 2 つの条件を書く理由は，どちらがのベクトルが $\boldsymbol{0}$ ならば，式 (L.19) が成立するためである。すなわち，$\boldsymbol{0}$ と任意のベクトルは線形従属となる。例えば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ の場合に不等式の等号が成立する。このときは，$\alpha = 0$ として $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y}$ が条件として成立するが，$\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$ を成立させる α は存在しない。

L.2　行列

線形写像・線形変換

- 次の関係を満たす線形空間から線形空間への写像 f をあるいはと呼ぶ。

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ f(\alpha) &= \alpha f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は写像元の任意のベクトルであり，α は任意のスカラーである。

次に説明する，行列は R^N から R^M またはまたは C^N から C^M への線形写像である。

行列

- (M, N)-行列は，R^N から R^M への，あるいは，C^N から C^M への線形変換である。先頭の (M, N)- は，変換先と変換元の線形空間の次元 M と N を明示するために書く。
- (M, N)-行列は，一般に縦 M 個，横 N 個の数字を 2 次元に並べて表す。

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1j} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2j} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{ij} & \dots & A_{iN} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{Mj} & \dots & A_{MN} \end{pmatrix} \tag{L.21}
$$

- M 次元の列ベクトルは，$(M, 1)$-行列と考えることができる。
- N 次元の行ベクトルは，$(1, N)$-行列と考えることができる。
- (M, M)-行列を，M 次正方行列と呼ぶ。
- 第 i 行，第 j 列の成分 A_{ij} を $\boldsymbol{A}$ の (i, j)-成分と呼ぶ。

N 次元ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ に，(M, N)-行列を作用させて得られる M 次元ベクトル

$$
\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{L.22}
$$

は，以下のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots A_{1N}x_N \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots A_{2N}x_N \\ \vdots \\ A_{M1}x_1 + A_{M2}x_2 + \dots A_{MN}x_N \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{L.23}
$$

同じことであるが，ベクトル $\boldsymbol{y}$ の第 i 成分 y_i は，

$$
y_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij}x_j \tag{L.24}
$$

と書くことができる。

「行」と「列」

- 行 (row) は横の並びを，列 (column) は縦の並びを表している。
  - 第 m「行」とは上から m 番目の横の並び
  - 第 n「列」とは左から n 番目の縦の並び

  を意味する。

行は横であるが，m 行は上から下に数えていき，m 番目の横の行のことを意味する。同様に，列は縦であるが，n 列は左から横に数えていき，n 番目の列を意味する。混乱しないように注意してほしい。

行列の基本演算

- 和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$
- スカラー積 $\alpha\boldsymbol{A}$
- 転置 $\boldsymbol{A}^T$
  - $(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}$
  - R^N のユークリッド内積に関して，次式が成立する。

$$\langle\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{y}\rangle \tag{L.25}$$

- 共役 $\boldsymbol{A}^*$
  - $(\boldsymbol{A}^*)^*=\boldsymbol{A}$
  - C^N のユークリッド内積に関して，次式が成立する。

$$\langle\boldsymbol{Ax},\boldsymbol{y}\rangle=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}\rangle \tag{L.26}$$

- 行列積 $\boldsymbol{AB}$

行列の全体は，その和とスカラー積で線形空間となる。

行列の和

行列の**和**は，各成分の和として次のように定義する。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MN} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ B_{M1} & B_{M2} & \dots & B_{MN} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \dots & A_{1N}+B_{1N} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \dots & A_{2N}+B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{M1}+B_{M1} & A_{M2}+B_{M2} & \dots & A_{MN}+B_{MN} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

このとき，**ゼロ行列** (和の単位元) は以下のように定義できる。

$$
\boldsymbol{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{L.27}
$$

加法の単位元であることを示す次の式は定義から明かである。

$$
\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O} = \boldsymbol{O}+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \tag{L.28}
$$

行列のスカラー積

スカラー積は，各成分にスカラーを書けるだけである。

$$
\begin{aligned}
\alpha\boldsymbol{A} &= \alpha \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MN} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha A_{11} & \alpha A_{12} & \dots & \alpha A_{1N} \\ \alpha A_{21} & \alpha A_{22} & \dots & \alpha A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha A_{M1} & \alpha A_{M2} & \dots & \alpha A_{MN} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{L.29}
$$

行列の転置

転置とは，行と列を入れ替える操作を意味する。

式 (L.21) の行列に対して，その転置行列 $\boldsymbol{A}^T$ は，次の式で与えられる。

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{M1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{M2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{1N} & A_{2N} & \dots & A_{MN} \end{pmatrix} \tag{L.30}$$

行列の共役

共役とは，C^N において，行と列を入れ替え，各成分の複素共役をとる操作を意味する。式 (L.21) の行列に対して，その共役行列 $\boldsymbol{A}^*$ は，次の式で与えられる。

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \overline{A_{11}} & \overline{A_{21}} & \dots & \overline{A_{M1}} \\ \overline{A_{12}} & \overline{A_{22}} & \dots & \overline{A_{M2}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \overline{A_{1N}} & \overline{A_{2N}} & \dots & \overline{A_{MN}} \end{pmatrix} \tag{L.31}$$

行ベクトルと行列の積

$$\begin{aligned} & (x_1 x_2 \dots x_M) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MN} \end{pmatrix} \\ = \quad & (A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + \dots + A_{M1}x_M, \ \cdots, \ A_{1N}x_1 + A_{2N}x_2 + \dots + A_{MN}x_M) \end{aligned}$$

行列と行列の積

線形空間においては，ベクトルどうしの乗算は一般には定義されないが，行列どうしの乗算は定義できる。

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \tag{L.32}$$

とすれば，行列 $\boldsymbol{C}$ によるベクトルの変換 $\boldsymbol{Cx}$ は，ベクトル $\boldsymbol{x}$ を行列 $\boldsymbol{B}$ で変換したあと，$\boldsymbol{Bx}$ さらに行列 $\boldsymbol{A}$ で変換することを意味している。行列の積を成分で表せば，以下のようになる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1K} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2K} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MK} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1N} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2N} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ B_{K1} & B_{K2} & \dots & B_{KN} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} + \dots + A_{1K}B_{K1} & \dots & A_{11}B_{1N} + \dots + A_{1K}B_{KN} \\ A_{21}B_{11} + \dots + A_{2K}B_{K1} & \dots & A_{21}B_{1N} + \dots + A_{2K}B_{KN} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ A_{M1}B_{11} + \dots + A_{MK}B_{K1} & \dots & A_{M1}B_{1N} + \dots + A_{MK}B_{KN} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

積 $\boldsymbol{C}$ の (i,j)-成分は次のように表現できる。

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{K} A_{ik}B_{kj} \tag{L.33}$$

行列またはベクトル A，B に対して，次式が成立する。

$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T \tag{L.34}$$

ベクトルを並べた行列表現

行列による演算を説明するために，行列を列ベクトルまたは行ベクトルを集めたものとして表現することがある。例えば，(M,N)-行列 $\boldsymbol{A}$ は，N 個の M 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \dots, N)$ を使って，

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1 \;\; \boldsymbol{a}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{a}_N) \tag{L.35}$$

と記すことができる。このとき，A_{ij} は $\boldsymbol{a}_j$ の第 i 成分となる。

同様に，M 個の N 次元ベクトル $\boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2, \dots, M)$ を使って，

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^T \\ \boldsymbol{b}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_N^T \end{pmatrix} = (\boldsymbol{b}_1 \;\; \boldsymbol{b}_2 \;\; \dots \;\; \boldsymbol{b}_N)^T \tag{L.36}$$

と記すこともできる。このとき，A_{ij} は $\boldsymbol{b}_i$ の第 j 成分となる。

M 個の K 次元ベクトル $\boldsymbol{b}_i$ $(i = 1, 2, \dots, M)$ と，N 個の K 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, 2, \dots, K)$ に対して，

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1^T \\ \boldsymbol{b}_2^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_M^T \end{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1 \;\; \boldsymbol{a}_2 \;\; \cdots \;\; \boldsymbol{a}_N) = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_N \rangle \\ \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_2 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_N \rangle \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{b}_M, \boldsymbol{a}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{b}_M, \boldsymbol{a}_2 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{b}_M, \boldsymbol{a}_N \rangle \end{pmatrix} \tag{L.37}$$

は，(M,N)-行列になる。

行列の演算の法則

- 積の結合則
$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) \tag{L.38}$$

- 積の分配則
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}\\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}\end{aligned}$$

- 和の結合則
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \tag{L.39}$$

- スカラー積の分配則
$$\begin{aligned}\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) &= \alpha\boldsymbol{A}+a\boldsymbol{B}\\ (\alpha+\beta)\boldsymbol{A} &= \alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

行列の積は一般には非可換であり，交換則は成立しない。すなわち，$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ となる。$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ が成立するとき。$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は**可換**であるという。

L.3　逆行列

逆行列

- N 次単位行列 $\boldsymbol{I}_N$ は，対角成分が全て 1 で，それ以外の成分がすべて 0 である (N,N)-行列である。

$$\boldsymbol{I}_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{L.40}$$

- 任意の (M,N)-行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，次式が成立する。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_N = \boldsymbol{I}_M\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \tag{L.41}$$

- $\boldsymbol{X}$ が，N 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列であるとは，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}$ の両方が単位行列になることである。すなわち，次式が成立することである。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_N \tag{L.42}$$

- $\boldsymbol{A}$ の逆行列を $\boldsymbol{A}^{-1}$ と記す。
- N 次正方行列の逆行列は，N 次正方行列である。

$\boldsymbol{O}$ が行列の加算の単位元であるのに対して，単位行列 $\boldsymbol{I}_N$ は，N 次正方行列の乗法がなす群の単位元である。すなわち，次式が成立する。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_N = \boldsymbol{I}_N\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \tag{L.43}$$

N 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の場合，式 (L.42) の $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_N$ または $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{I}_N$ のどちらかが成り立てば，他方が成立することが証明できる。したがって，逆行列であることを示すためには，どちらか一方だけを示せば良い。

逆行列はいつでも存在するとは限らない。例えば，$\boldsymbol{O}$ の逆行列は存在しないし，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \tag{L.44}$$

なども逆行列は存在しない。ただし，逆行列は存在すれば一意である。すなわち，ある行列に対する逆行列は 1 つしか存在しない。そのため，$\boldsymbol{A}$ の逆行列を $\boldsymbol{A}^{-1}$ と書くことができる。

逆行列を求めるためには，行列式を使った余因子行列を使う方法と，掃き出し法を使う方法がある。前者は次元が大きくなると，逆行列を求めるための計算量が，行列の大きさの階乗に比例して大きくなるが，解析的に逆行列を求める場合には便利である。数値的に求めるためには，掃き出し法が使われる。余因子行列に付いては次の節で説明する。

L.4 行列式

行列式

正方行列をスカラーに変換する写像である。行列式を知っていると便利な点は，次の通りである。

- 行列式の値が 0 でなければ，行列が正則になり，逆行列が存在する。
- クラメルの公式：数式的に連立 1 次方程式を解くときに便利である。
- 線形システムの安定性を調べることができる。

1 次正方行列の行列式の計算

$$\begin{vmatrix} A_{11} \end{vmatrix} = A_{11} \tag{L.45}$$

2 次正方行列の行列式の計算

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} \tag{L.46}$$

左上から右下への積をプラス，左下から右上への積をマイナスとして加えることによって計算できる。

3 次正方行列の行列式の計算

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \begin{array}{l} = A_{11}A_{22}A_{33} + A_{21}A_{32}A_{13} + A_{31}A_{12}A_{23} \\ \quad -A_{31}A_{22}A_{13} - A_{21}A_{12}A_{33} - A_{11}A_{32}A_{23} \end{array} \tag{L.47}$$

2 次正方行列の行列式と同様に，成分を斜めに乗算してゆき，それらの項を左上から右下への積をプラス，左下から右上への積をマイナスとして加えることによって計算できる。

4 次正方行列の行列式の計算

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \\ = \quad & A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} - A_{21}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} \\ & +A_{31}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{22} & A_{33} & A_{24} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} - A_{41}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{L.48}$$

4 次正方行列の行列式の計算は，4 つの 3 次正方行列の行列式の計算に分解して行う。2 次や 3 次正方行列とは異なり，斜めに乗算するだけで 4 次正方行列の行列式を求めることはできない。

対称群 S_N

- 行列式の定義式 (L.62) を理解するためには，対称群 S_N を知る必要ある。
- 対称群は順番の入れ替え操作 (置換) を表すものである。
- 1 から N の整数を置換する場合，$N!$ 通りの方法がある。
- 対称群 S_N の要素 σ は，$N!$ 個の中の 1 つの入れ替えを表している。
- σ^{-1} は，σ の逆置換を表す。

S_N の要素である置換 σ は，$\{1, 2, \ldots, N\}$ から $\{1, 2, \ldots, N\}$ への 1 対 1 の写像となる。

$$l = \sigma(k) \tag{L.49}$$

このとき，$k, l \in \{1, 2, \ldots, N\}$ である。置換の例を示す。例えば，S_5 の置換 σ として，

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 5, \quad \sigma(3) = 2, \quad \sigma(4) = 1, \quad \sigma(5) = 4 \tag{L.50}$$

という写像を考えることができる。これを，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \tag{L.51}$$

と書く。これは，$(2, 5)$-行列ではなく，上の数が下の数に写像されることを表している。上下が対応していれば良いため，1 つの置換の書き方は 1 通りでない。例えば，

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{L.52}$$

と書くこともできる。

次に，置換の積を定義する。ここでは，左からの作用を考える。したがって，置換の積では右に書いたものから順番に作用させていく。例を示す。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{L.53}$$

例えば，初めの置換で 1 は 2 に行き，次の置換で 2 は 5 に行くため，まとめれば，1 は 5 に行くことを表している。このようにして置換に乗算が定義され，置換の全体は群をなすため，対称群と呼ばれる。この演算の単位元は次の通りである。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{L.54}$$

式 (L.51) の逆置換 σ^{-1} は，次式となる。

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \tag{L.55}$$

互換

- 互換は 2 つの要素だけを入れ替え，それ以外は動かさない置換である。
- すべての置換は互換の積に分解することができる。
- 偶置換と奇置換
  - 偶置換：偶数個の互換の積で表される置換
  - 奇置換：奇数個の互換の積で表される置換
  - 置換 σ に対する符号関数 $\mathrm{sign}(\sigma)$ が次の様に定義される。

$$\mathrm{sign}(\sigma)=\begin{cases}1 & \sigma\text{ が偶置換}\\ -1 & \sigma\text{ が奇置換}\end{cases} \tag{L.56}$$

互換の例として，2 と 3 を入れ替え他はそのままの値をとるものを考える。それは，上の表現に従えば

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&2&4&5\end{pmatrix} \tag{L.57}$$

と書くことができる。これを，$(2\ \ 3)$ と書く。一般に互換 $(k\ \ l)$ は，k と l を入れ替え，他はそのままの値をとることを表す。

すべての置換は，互換の積になる。例えば,

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&2&1&4\end{pmatrix}=(1,4)(1,5)(1,2)(1,3) \tag{L.58}$$

となる。上の分解の方法は次の通りである。1 は 3 に行く，したがって最初に 1 と 3 の互換をおく。この互換により，3 は 1 に行く。3 は 2 に行かなくてはいけないので，1 と 2 を交換する。こうすれば，3 は 1 を経由して 2 に行く。この互換により，2 が 1 に行く。2 は互換 $(1,3)$ では動かされないので，初めから考えても 2 は 1 に行く。2 は 5 に行かなくては行けないので，1 と 5 を交換する。一般に，1 から M までの相異なる整数 $a_1,\ldots,a_{M-1}$ とし，置換 σ を

$$\sigma=(1,a_{M-1})\cdots(1,a_2)(1,a_1) \tag{L.59}$$

で定義し，$a_0=a_M=1$ と表記すれば，次式が成立する。

$$a_{m+1}=\sigma(a_m),\quad (m=0,1,2,\ldots,M-1) \tag{L.60}$$

置換が既約でない場合，例えば，次の置換 σ のように，1 と 2，3 と 4 と 5 の中だけの置き換えを組み合わせたものになっている場合を考える。

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&5&3\end{pmatrix} \tag{L.61}$$

この場合は，1 と 2 の中の置換，3 と 4 と 5 の中の置換をそれぞれ互換に分解し，その結果を掛け合わせればよい。3 と 4 と 5 の中の置換を互換に分解するときには，式 (L.59) の 1 の代わりに例えば 3 を使えば良い。

一般に，置換を互換の積に分解する方法は 1 通りではない。しかしながら，その置換を表す互換の数が奇数または偶数であることは変わらない (証明は省略する)。したがって，偶置換，奇置換および式 (L.56) の符号関数が，矛盾なく定義できる。

行列式の定義

N 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ の行列式 $|\boldsymbol{A}|$ ($\det(\boldsymbol{A})$ とも書く) を次のように定義する。

$$\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| \equiv \sum_{n=1}^{N!} \mathrm{sign}(\sigma_n) \Pi_{i=1}^{N} A_{i\,\sigma_n(i)} \tag{L.62}$$

σ_n $(n = 1, 2, \ldots, N!)$ で S_N のすべての置換を表し，式 (L.62) の和はそのすべての置換に対する和である。

式 (L.62) の $\Pi_{i=1}^{N}$ を書き下せば，次式のようになる。

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{n=1}^{N!} \mathrm{sign}(\sigma_n) A_{1\,\sigma_n(1)} A_{2\,\sigma_n(2)} \cdots A_{N\,\sigma_n(N)} \tag{L.63}$$

行列式の性質

- 転置した行列の行列式はもとの行列式と等しい。

$$|\boldsymbol{A}^T| = |\boldsymbol{A}| \tag{L.64}$$

- 行列のある列ベクトルが 2 つの列ベクトルの和である場合は，それぞれの列ベクトルに対する行列式の和と等しい。

$$\begin{aligned} & |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_N| \\ = \; & |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_N| + |\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_N| \end{aligned} \tag{L.65}$$

- 行ベクトルの場合も同様の式が成立する。
- 2 つの行列の積の行列式は，それぞれの行列式の積に等しい。

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}| \tag{L.66}$$

- 行列内の N 個の行ベクトルが 1 次独立でない，あるいは N 個の列ベクトルが 1 次独立でない場合は，行列式の値は 0 となる。

転置した行列の行列式

行列式の定義式 (L.65) より，

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}^T| &= \sum_{n=1}^{N!}\mathrm{sign}(\sigma_n)\Pi_{i=1}^{N}A_{\sigma_n(i)\,i} = \sum_{n=1}^{N!}\mathrm{sign}(\sigma_n)\Pi_{i=1}^{N}A_{\sigma_n(\sigma_n^{-1}(i))\,\sigma_n^{-1}(i)} \\
&= \sum_{n=1}^{N!}\mathrm{sign}(\sigma_n)\Pi_{i=1}^{N}A_{i\,\sigma_n^{-1}(i)} = \sum_{n=1}^{N!}\mathrm{sign}(\sigma_n)\Pi_{i=1}^{N}A_{i\,\sigma_n(i)} \\
&= |\boldsymbol{A}|
\end{aligned}
$$

となり，行列式の転置はもとの行列式に等しくなる。上式の 2 番目の等号では，行列の成分の添字において i を $\sigma_n^{-1}(i)$ に置き換えている。i を 1 から N まで変化させて積をとるのため，そのように置き換えをしても積の順番が変わるだけで，積の成分となる行列成分は全く同じものが現れるため，積の値は変わらない。4 番目の等号では，行列の成分のインデックスにおいて σ_n^{-1} を σ_n に置き換えている。置換に対する和もすべての置換に対してとるため，そのように置き換えても和の値は変わらない。したがって，式 (L.64) が成立する。

列ベクトル和

以下，列に関して議論していくが，行に関しても同様な式が成立する。

$\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, \ldots, N)$ を N 次元列ベクトルとし，$\boldsymbol{a}_j$ の第 i 成分を $(a_j)_i$ で表記する。$\boldsymbol{a}_i$ を並べた行列

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_i & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{pmatrix} \tag{L.67}
$$

の行列式は,

$$
|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_j & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_1)_1 & \cdots & (a_j)_1 & \cdots & (a_N)_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_1)_i & \cdots & (a_j)_i & \cdots & (a_N)_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_1)_N & \cdots & (a_j)_i & \cdots & (a_N)_N \end{vmatrix} \tag{L.68}
$$

と書くことができる。

行列式の定義式より，j を固定すれば $|A|$ は $\boldsymbol{a}_j$ に対して線形になっている。すなわち，$(a_j)_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ だけを変数，残りは係数と考えるとき，$(a_j)_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ に関しては，1 次の項しか現れない。すなわち,

$$
|\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k\,(a_j)_k \tag{L.69}
$$

となる。ここで，α_k は，$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_N$ の成分からなる，$N-1$ 次式である。

式 (L.65) の $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,\ldots,N)$ は N 次元列ベクトルであり，上のように展開して書けば,

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix} \\
=\ & \sum_{k=1}^{N} \alpha_k[(b_j)_k + (c_j)_k] = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\,(b_j)_k + \sum_{k=1}^{N} \alpha_k\,(c_j)_k \\
=\ & \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_{j-1} & \boldsymbol{c} & \boldsymbol{a}_{j+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{L.70}$$

となり，式 (L.65) が成立する。

スカラー積

α を実数とすれば，式 (L.69) より次式が成立する。

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \alpha\boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix} \tag{L.71}$$

ベクトルの交換

列ベクトルの交換に関して，次式が成立する。

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_l & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_l & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix} \tag{L.72}$$

第 k 列と第 l 列を交換した行列式は，定義式 (L.62) で，σ_n のところに，σ_n と $(k\ \ l)$ の積である $\sigma_n(k\ \ l)$ を代入すればよい。したがって，sign 関数の性質より，式 (L.72) が成立する。

同じ列ベクトルを含む場合は，その 2 つの列ベクトルを交換すると考えれば，符号 (プラス／マイナス) が反転するので,

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a} & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix} \tag{L.73}$$

となる。したがって，行列式の値が 0 になる。

行列式の列ベクトルに関する線形性と，同じ列ベクトルを含む場合行列式が 0 になることから，第 k 列に α 倍した第 l 列 $(l \neq k)$ を加えても，行列式の値は変わらない。

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k + \alpha\boldsymbol{a}_l & \cdots & \boldsymbol{a}_l & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix} \\
=\ & \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_l & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_l & \cdots & \boldsymbol{a}_l & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix} \\
=\ & \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_k & \cdots & \boldsymbol{a}_l & \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{L.74}$$

これらの関係から，列ベクトルが 1 次独立でない場合は，行列式が 0 になることわかる。なぜならば，$\{\boldsymbol{a}_n\}_{n=1}^{N}$ が 1 次独立でないとすれは，0 でないものが存在する実数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{N}$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0} \tag{L.75}$$

が成立する。今，一般性を失うことなく α_1 が 0 でないとすれば，

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{1}{\alpha_1}\sum_{n=2}^{N}\alpha_n \boldsymbol{a}_n \tag{L.76}$$

となるので，

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{ccc} \left(-\frac{1}{\alpha_1}\sum_{k=2}\alpha_k \boldsymbol{a}_k\right) & \boldsymbol{a}_2 \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{array} \right| \\ &= -\frac{1}{\alpha_1}\sum_{k=2}\alpha_k \left| \begin{array}{ccc} \boldsymbol{a}_k & \boldsymbol{a}_2 \cdots & \boldsymbol{a}_N \end{array} \right| = 0 \end{aligned} \tag{L.77}$$

となる。最後に $\boldsymbol{0}$ になる理由は，和をとるすべての行列式が同じベクトルの列を含むからである。

「一般性を失うことなく」の文は，α_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ の中で，どの α_n が 0 でないとしても同様に証明できるため，ここでは α_1 を 0 でないとして証明するということである。

行列の積の行列式

$|\boldsymbol{A}^T| = |\boldsymbol{A}|$ であるから，

$$\sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma)A_{1\sigma(1)}A_{2\sigma(2)}\cdots A_{N\sigma(N)} = \sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma)A_{\sigma(1)1}A_{\sigma(2)2}\cdots A_{\sigma(N)N} \tag{L.78}$$

が成立する。N 次行列 $\boldsymbol{A}$ の N 個の列ベクトルを $\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$ とおく。行列の積 $\boldsymbol{AB}$ の第 j 列は，

$$\sum_k B_{k\,j}\boldsymbol{a}_k \tag{L.79}$$

となる。したがって，行列式の 1 つ 1 つの列ベクトルに対する線形性より，

$$|\boldsymbol{AB}| = \sum_{k_1}\sum_{k_2}\cdots\sum_{k_n} B_{k_1\,1}B_{k_2\,2}\cdots B_{k_N\,N}|\boldsymbol{a}_{k_1}\,\boldsymbol{a}_{k_2}\cdots\boldsymbol{a}_{k_N}| \tag{L.80}$$

となる。ここで，$i \neq j$ で一つでも $k_i = k_j$ となる k_i と k_j が存在すると，$|\boldsymbol{a}_{k_1}\,\boldsymbol{a}_{k_1}\cdots\boldsymbol{a}_{k_N}| = 0$ となるから，式 (L.80) の和を k_j の値が互いに異なる場合に限ることができる。すなわち，

$$|\boldsymbol{AB}| = \sum_{k_1}\sum_{k_2\neq k_1}\cdots\sum_{k_N\neq k_1, k_N\neq k_2, \ldots k_N\neq k_{N-1}} B_{k_1\,1}B_{k_2\,2}\cdots B_{k_N\,N}|\boldsymbol{a}_{k_1}\,\boldsymbol{a}_{k_2}\cdots\boldsymbol{a}_{k_N}| \tag{L.81}$$

と書くことができる。$k_1, k_2, \ldots, k_N$ は 1 から n までの値をとるが，すべて異なる値となる。したがって，$\sigma(i) = k_i$ となる置換 σ が 1 つだけ存在する。逆に，任意の置換 σ に対して，$k_i = \sigma(i)$ とおけば，式 (L.81) の和の条件を満たす。したがって，変数 k_j と和 $\sum_{k_1}\sum_{k_2\neq k_1}\cdots\sum_{k_N\neq k_1, k_N\neq k_2, \ldots k_N\neq k_{N-1}}$ は，それぞれ，$\sigma_n(j)$ と $\sum_{n=1}^{N!}$ に置き換えることができる。さらに，

$$|\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}\,\boldsymbol{a}_{\sigma(2)}\cdots\boldsymbol{a}_{\sigma(N)}| = \mathrm{sign}(\sigma)|\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_N| = \mathrm{sign}(\sigma)|\boldsymbol{A}| \tag{L.82}$$

が成立する。したがって，

$$|\boldsymbol{AB}| = \sum_{n=1}^{N!} B_{\sigma_n(1)\,1}B_{\sigma_n(2)\,2}\cdots B_{\sigma_n(N)\,N}\mathrm{sign}(\sigma_n)|\boldsymbol{a}_1\,\boldsymbol{a}_2\cdots\boldsymbol{a}_N| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \tag{L.83}$$

となる。

L.5 クラメルの公式

余因子

- 小行列とは，ある行列の一部分を取り出した行列のことである。小行列で同じ行または同じ列に属している成分は，もとの行列でも同じ行または同じ列に属している必要がある。
- 主小行列とは，小行列でその対角線がもとの行列の対角線に含まれるものである。
- 小行列式とは，小行列の行列式のことである。
- 主小行列式とは，主小行列の行列式のことである。
- 余因子とは，もとの行列から 1 つの行 (第 i 行) と 1 つの列 (第 j 列) を取り除いた小行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものである。$\tilde{A}_{(i,j)}$ で，行列 A の第 i 行と第 j 列を取り除いた場合の余因子を表す。
- 余因子行列とは，余因子を成分として並べて作成した行列である。その行列の (i, j)-成分は，$\tilde{A}_{ij}$ で与えられる。
- 余因子展開とは，行列式を余因子の和によって表した次の展開式を意味する。

$$|A| = \sum_{k=1}^{N} A_{kj}\tilde{A}_{kj} \tag{L.84}$$

例として，(4,4)-行列

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{12} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix} \tag{L.85}$$

を考える。小行列とは，例えば，

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{11} & A_{14} \\ A_{41} & A_{44} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{43} \end{pmatrix}$$

のことを言う。最初の例は第 2 行と第 2 列を除いた小行列，次の例は第 2 行，第 3 行と第 2 列，第 3 列目を除いた小行列，最後の例は第 2 行，第 3 行と第 1 列，第 2 列，第 3 列を除いた小行列である。

余因子 $\tilde{A}_{2,3}$ は，次のように与えられる。

$$\tilde{A}_{2,3} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} \\ A_{31} & A_{32} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} \end{vmatrix} \tag{L.86}$$

余因子展開

$N=3$ の例を使って証明する。まず，次の式が成立する。

$$\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_{21} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A_{31} \end{pmatrix} \tag{L.87}$$

したがって，式 (L.65) より，

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \tag{L.88}$$

となる。ここで，行ベクトルの入れ替えの性質と行列式の定義とから，

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \tag{L.89}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = -A_{21} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \tag{L.90}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} A_{31} & A_{32} & A_{33} \\ 0 & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} = A_{31} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} \tag{L.91}$$

が成立する。したがって，

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{21} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{31} \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} \tag{L.92}$$

となる。これを余因子を使って表せば，

$$|A| = A_{11}\tilde{A}_{11} + A_{21}\tilde{A}_{21} + A_{31}\tilde{A}_{31} \tag{L.93}$$

と書くことができる。

行列の乗算の表記を使えば，次のように書くことができる。

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \tag{L.94}$$

$$= \left(\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad - \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} \right) \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} \tag{L.95}$$

となる。余因子を使って表記すれば，

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} \tag{L.96}$$

となる。上式は第 1 列を使って展開したが，ほかの列でも，同じ結果が得られる。すなわち，任意の i に対して，次式が成立する。

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{k=1}^{N} A_{ik}\tilde{A}_{ik} \tag{L.97}$$

ここでは，$(3,3)$-行列について示しただけであるが，任意の大きさの行列に関して余因子展開 (L.84) が成立する。

クラメル (Cramer) の公式

- 行列 $\boldsymbol{A}$ の逆行列は，余因子行列の転置行列を $|\boldsymbol{A}|$ で割ったものである。
- **クラメルの公式：** $\boldsymbol{A}$ を正則な N 次正方行列とし，連立方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を考える。$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{b}$ は，R^N または C^N の元である。$\boldsymbol{A}$ を N 個の列ベクトルを並べたものと考え，その i 番目の列ベクトルを $\boldsymbol{b}$ に置き換えたものを，$\hat{\boldsymbol{A}}_i$ とおく (式 (L.105) を参照)。$\boldsymbol{x}$ を方程式の解とするとき，その第 i 成分 x_i に対して次式が成立する。

$$x_i = \frac{|\hat{\boldsymbol{A}}_i|}{|\boldsymbol{A}|} \tag{L.98}$$

余因子展開において，係数の列と余因子の列を異なるものとしてみる。すなわち，相異なる i, j に対して，

$$\sum_{k=1}^{3} A_{ki}\tilde{A}_{kj} \tag{L.99}$$

を考える。この場合は合成した行列式の i 列と j 列が同じものになる。したがって，行列式の値が 0 になる。たとえば，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} A_{k2}\tilde{A}_{k1} &= A_{12}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{22}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{32}\begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A_{12} & A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = 0 \end{aligned} \tag{L.100}$$

となる。この式では，第 1 列と第 2 列が同じベクトルになるので，行列式の値が 0 になっている。式 (L.100) の最後の行列式の第 1 列の成分は係数から第 2 列の成分は小行列式に由来している。一

般の場合も，相異なる i, j に対して，

$$\sum_{k=1}^{N} A_{ki}\tilde{A}_{kj} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{A_{12}} & & \text{第}\,i\,\text{列} & & \text{第}\,j\,\text{列} & & \phantom{A_{1N}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} A_{12} & \cdots & A_{1i} & \cdots & A_{1i} & \cdots & A_{1N} \\ A_{22} & \cdots & A_{2i} & \cdots & A_{2i} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N2} & \cdots & A_{Ni} & \cdots & A_{Ni} & \cdots & A_{NN} \end{vmatrix} \end{array} = 0 \tag{L.101}$$

となる。この結果を余因子展開の式とまとめて書けば，

$$\sum_{k=1}^{N} A_{ki}\tilde{A}_{kj} = \begin{cases} |\boldsymbol{A}| & (i = j) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases} \tag{L.102}$$

となる。式 (L.102) を，余因子行列 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ を使って書けば，

$$\boldsymbol{A}^T\tilde{\boldsymbol{A}} = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_N \tag{L.103}$$

となる ($\boldsymbol{I}_N$ は，N 次単位行列)。したがって，

$$\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\tilde{\boldsymbol{A}}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_N$$

と書けるので，

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\tilde{\boldsymbol{A}}^T \tag{L.104}$$

となる。すなわち，余因子行列の転置をもとの行列の行列式で割ることによって，逆行列を求めることができる。

連立方程式

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

の解は，

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b}$$

で与えられる。したがって，$\boldsymbol{x}$ の第 i 成分は，

$$x_i = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\sum_{j=1}^{N}\tilde{A}_{ji}b_j$$

となる。再度，余因子展開を用いれば，

$$x_i = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \phantom{A_{11}} & & \phantom{A_{1(i-1)}} & \text{第}\,i\,\text{列} & \phantom{A_{1(i+1)}} & & \phantom{A_{1N}} \end{array} \\ \begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1(i-1)} & b_1 & A_{1(i+1)} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & \cdots & A_{2(i-1)} & b_2 & A_{2(i+1)} & \cdots & A_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{N(i-1)} & b_N & A_{N(i+1)} & \cdots & A_{NN} \end{vmatrix} \end{array} \tag{L.105}$$

が成立する。これがクラメルの公式である。たとえば，$N = 3$ の場合，

$$x_1 = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \begin{vmatrix} b_1 & A_{12} & A_{13} \\ b_2 & A_{22} & A_{23} \\ b_3 & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \tag{L.106}$$

$$x_2 = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \begin{vmatrix} A_{11} & b_1 & A_{13} \\ A_{21} & b_2 & A_{23} \\ A_{31} & b_3 & A_{33} \end{vmatrix} \tag{L.107}$$

$$x_3 = \frac{1}{|\boldsymbol{A}|} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & b_1 \\ A_{21} & A_{22} & b_2 \\ A_{31} & A_{32} & b_3 \end{vmatrix} \tag{L.108}$$

が成立する。この関係により，1 次方程式の解を行列式の計算で得ることができる。

L.6　固有値と固有ベクトル

固有方程式

- 固有方程式とは，N 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ とスカラー λ に対する次の方程式のことである。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \tag{L.109}$$

- 固有ベクトルとは，固有方程式の $\boldsymbol{0}$ でない解 $\boldsymbol{x}$ のことである。
- 固有値とは，固有方程式の固有ベクトルに対応する λ のことである。
- 固有多項式あるいは特性多項式とは，次の λ の N 次多項式のことである。

$$|\lambda\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{A}| \tag{L.110}$$

- 固有方程式あるいは特性方程式とは，固有値を求めるための次の N 次方程式である。

$$|\lambda\boldsymbol{I}_N - \boldsymbol{A}| = 0 \tag{L.111}$$

- 固有値は高々N 個しか存在しない。
- $\boldsymbol{x}$ が固有ベクトルの場合，スカラー α $(\alpha \neq 0)$ 倍した $\alpha\boldsymbol{x}$ も固有ベクトルになる。
- 異なる固有値に対応する固有ベクトルは 1 次独立である。

式 (L.109) は，以下のように変形できる。

$$(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \tag{L.112}$$

もし，$\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ が正則ならば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{x}$ は固有ベクトルの条件を満たさず，λ は固有値とな

らない。したがって，λ が固有値ならば，$\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ は正則ではないため，その行列式が 0 となり，固有値は式 (L.111) を満たさなくてはいけない。

証明は略すが，$\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}$ が正則でないならば，式 (L.112) を満たす $\boldsymbol{0}$ でない $\boldsymbol{x}$ が存在し，λ は固有値となる。式 (L.111) は λ に関する N 次多項式であり，その解は高々N 個であるので，固有値の数も高々N 個となる。

相異なる固有値，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_N$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_N$ とおく。$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_N$ が 1 次独立であることを背理法を使って証明する。

もし，それらが 1 次独立でないとすれば，一般性を失うことなく，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_l$ が 1 次独立で，1 つ増やした，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_l,\boldsymbol{x}_{l+1}$ が 1 次従属となるものが存在する。1 次従属であるから，

$$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_l\boldsymbol{x}_l+\alpha_{l+1}\boldsymbol{x}_{l+1}=\boldsymbol{0} \tag{L.113}$$

となる $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{l+1}$ で，その中の少なくとも 1 つが 0 でないものが存在する。一般性を失うことなく，$\alpha_l\neq 0$ とする。この式に $\boldsymbol{A}$ を掛けると，

$$\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\lambda_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_l\lambda_l\boldsymbol{x}_l+\alpha_{l+1}\lambda_{l+1}\boldsymbol{x}_{l+1}=\boldsymbol{0} \tag{L.114}$$

が成立する。(L.113) $\times\lambda_{l+1}-$ (L.114) は，

$$\alpha_1(\lambda_{l+1}-\lambda_1)\boldsymbol{x}_1+\alpha_2(\lambda_{l+1}-\lambda_2)\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_l(\lambda_{l+1}-\lambda_l)\boldsymbol{x}_l=\boldsymbol{0} \tag{L.115}$$

となる。λ_i は異なるため，$(\lambda_{l+1}-\lambda_1),\ldots,(\lambda_{l+1}-\lambda_l)$ はすべて 0 でない。また，$\alpha_l\neq 0$ より，$\alpha_l(\lambda_{l+1}-\lambda_l)$ は 0 でない。したがって，式 (L.115) は，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_l$ が 1 次従属であることを示しており，それらが 1 次独立であるという仮定に反する。したがって，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_N$ は 1 次独立である。

固有多項式が重解を持つ場合，N 個の固有ベクトルが存在するとは限らない。その例を示す。

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix} \tag{L.116}$$

とすると，固有多項式は，

$$\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2\\ -2 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1=0 \tag{L.117}$$

となり，固有値は 1 だけである。固有ベクトルは，

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} &= \left(1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} && \text{(L.118)}\\ &= \begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} && \text{(L.119)}\end{aligned}$$

を満たさなくてはいけないため，固有ベクトルは $(1,1)$ の定数倍しかない。逆に，

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{L.120}$$

の場合，固有値は 1 だけであるが，この $\boldsymbol{A}$ は単位行列であるので，任意のベクトルが固有ベクトルとなっている。

$\boldsymbol{A}$ が対称あるいは自己共役の場合

- R^N において，$\boldsymbol{A}$ が対称であるある場合，すなわち，

$$\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A} \tag{L.121}$$

  である場合，N 個の固有ベクトルを互いに直交するように選ぶことができる。
- C^N において，$\boldsymbol{A}$ が自己共役である場合，上と同様の性質が成立する。

今回はこの説明は省略するが，対称 (自己共役) 行列に対する固有値・固有ベクトルは，統計解析や線形システムのグラミアンの解析などで重要である。また，C^N においては，行列 $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ を満たす場合，すなわち正規である場合も同様の性質が成立する。

行列の対角化

- 行列 $\boldsymbol{A}$ の対角成分とは，ある l に対して A_{ll} と書くことができる成分である。すなわち，行列の左上から右下への対角線上にある成分を意味する。
- 対角行列とは，対角成分以外の成分が全て 0 である行列を意味する。
- N 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ に，1 次独立な N 個の固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_N$ が存在するものとする。
- $\boldsymbol{p}_k$ に対応する固有値を λ_k し，行列 P を，

$$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_1 \; \boldsymbol{p}_2 \; \cdots \; \boldsymbol{p}_N) \tag{L.122}$$

  とおくと，$\boldsymbol{P}^{-1}A\boldsymbol{P}$ が対角行列になる。

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\Large 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & \lambda_N \end{pmatrix} \tag{L.123}$$

- $\boldsymbol{A}$ が対角化できる場合，$\boldsymbol{A}^n$ や $e^{\boldsymbol{A}}$ などが計算できる。

対角化の式 (L.123) を示す。まず,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \dots & \boldsymbol{p}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2 & \dots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_N \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1\boldsymbol{p}_1 & \lambda_2\boldsymbol{p}_2 & \dots & \lambda_N\boldsymbol{p}_N \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}_1 & \boldsymbol{p}_2 & \dots & \boldsymbol{p}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_N \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_N \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

となる。固有ベクトルが 1 次独立であることを仮定しているので,$\boldsymbol{P}$ は正則である。したがって,$\boldsymbol{P}^{-1}$ が存在する。

$$
\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_N \end{pmatrix} \tag{L.124}
$$

対角行列の積は,対角成分の積で表されるため,計算が簡単になる。

$$
\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \alpha_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \beta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \alpha_N\beta_N \end{pmatrix} \tag{L.125}
$$

したがって,例えば,

$$
\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \lambda_N \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \text{\huge 0} \\ & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & \lambda_N^n \end{pmatrix} \tag{L.126}
$$

が成立するため,対角化できれば行列のべき乗計算を容易に行うことができる。

対角化の有用性として,例えば $\boldsymbol{A}^n$ が次式のように計算できる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^n &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\cdots(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^n\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_N^n \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}
\end{aligned} \tag{L.127}
$$

L.6.1 行列の関数と行列の微積分

行列のべき級数

- 行列のベキ級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \boldsymbol{A}^k \tag{L.128}$$

を考えることができる ($\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}_n$ とする)。

- この級数が収束するとは，N 次正方行列

$$\sum_{k=1}^{L} a_k \boldsymbol{A}^k \tag{L.129}$$

の N^2 個存在する各成分が $L \to \infty$ で収束することである。

- 通常の数の場合と同じように，次のような級数が定義できる。

$$\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{A}^k \\
\cos \boldsymbol{A} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \boldsymbol{A}^{2k} \\
\sin \boldsymbol{A} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \boldsymbol{A}^{2k+1} \\
(I - \mu \boldsymbol{A})^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \boldsymbol{A}^k
\end{aligned}$$

本書では行列の収束に関しては扱わないが，上で示した指数関数や三角関数の場合は，行列のべき乗が次数の階乗で割られているため，収束することが証明できる。

行列 $\boldsymbol{A}$ が対角化できる場合，$\boldsymbol{A}$ の指数関数 $e^{\boldsymbol{A}}$ は，次のようにに，わかりやすい形で表すことができる。

$$\begin{aligned}
e^{\boldsymbol{A}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \boldsymbol{A}^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & 0 \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N^n \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda_1^n & & & 0 \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda_N^n \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_N} \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}
\end{aligned}$$

三角関数に関しても同様に計算できる。

関数の行列の微分

- 関数の行列とは，その各成分が実関数または複素関数 $A_{ij}(t)$ であるものであり，$\boldsymbol{A}(t)$ で表す。

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix} A_{11}(t) & \cdots & A_{1N}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ A_{M1}(t) & \cdots & A_{MN}(t) \end{pmatrix} \tag{L.130}$$

- 線形システムの場合は，変数 t として時間を想定している。
- 関数の行列の微分は各成分を微分したものを成分とする行列として定義する。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}A_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}A_{1N}(t) \\ \vdots & & \\ \frac{d}{dt}A_{M1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}A_{MN}(t) \end{pmatrix} \tag{L.131}$$

- 行列の積の微分の法則が成立する。

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t))=\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)\right)\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\left(\frac{d}{dt}\boldsymbol{B}(t)\right) \tag{L.132}$$

- 高階の微分の場合も，積の順番に注意すれば Leibniz(ライプニッツ) の法則が成立する。

$$\frac{d^n}{dt^n}(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t))=\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\left(\frac{d^k}{dt^k}\boldsymbol{A}(t)\right)\left(\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\boldsymbol{B}(t)\right) \tag{L.133}$$

関数の行列は関数を縦横に並べただけのものである。その微分も各成分の微分を並べたものである。行列の積の微分も，積の順番を交換できないということ以外は，積の微分の法則と変わらない。このことは，例えば,

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{B}(t))\right)_{ij} &= \frac{d}{dt}\left(\sum_k A_{ik}(t)B_{kj}(t)\right) \\ &= \sum_k\left(\frac{d}{dt}A_{ik}(t)\right)B_{kj}(t)+\sum_k A_{ik}(t)\left(\frac{d}{dt}B_{kj}(t)\right)\end{aligned}$$

となるので，式 (L.132) が成立することからもわかる。

行列の指数関数の微分

- 正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，

$$\boldsymbol{X}(t) = e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{A}^k t^k \tag{L.134}$$

が，t のある区間で定義できるとき，$\boldsymbol{X}(t)$ は関数の行列となる。

- $\boldsymbol{X}(t)$ の微分を考えば，次の式が成立する。

$$\frac{d}{dt} e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{A} e^{\boldsymbol{A}t} = e^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{A} \tag{L.135}$$

- この他に，次の性質を使う。

$$e^{\boldsymbol{A}t} \cdot e^{\boldsymbol{A}s} = e^{\boldsymbol{A}(t+s)} \tag{L.136}$$

$$e^{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})t} = e^{\boldsymbol{A}t} \cdot e^{\boldsymbol{B}t} \qquad (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \text{ は可換とする}) \tag{L.137}$$

$$\left(e^{\boldsymbol{A}t}\right)^{-1} = e^{-\boldsymbol{A}t} \tag{L.138}$$

式 (L.135) は，級数展開を使って示すことができる。

$$\frac{d}{dt} e^{\boldsymbol{A}t} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{A}^k t^k \right) = \boldsymbol{A} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \boldsymbol{A}^{k-1} t^{k-1} \right) = \boldsymbol{A} e^{\boldsymbol{A}t} \tag{L.139}$$

また，関数の行列の微分方程式を考える。

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{X}(t) = \boldsymbol{A} \boldsymbol{X}(t) \tag{L.140}$$

このとき，次式が成立することとが証明できる。

$$\boldsymbol{X}(t) = e^{\boldsymbol{A}t} \boldsymbol{X}(0) \tag{L.141}$$

式 (L.136) および式 (L.137) は展開式 (L.134) から証明できる。式 (L.136) は微分方程式を使っても証明できる。式 (L.138) は式 (L.136) で $t = -s$ とすれば明らかである。

L.6.2 行列の階数 (rank，ランク)

部分空間

- 線形空間の部分集合 S が部分空間であるとは，S の任意の元 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ と任意のスカラー α に対して，
  - $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$
  - $\alpha \boldsymbol{x}$

  が，S に含まれることである。
- 3 次元空間を考えれば，原点だけの集合 $\{\mathbf{0}\}$，原点を通る直線，原点を通る平面，および，もとの 3 次元空間の全体が部分空間になる。
- 部分空間は線形空間になる。
- R^N や C^N の線形部分空間には次元が定まる。

部分空間は，線形システムでは，拘束条件を表すために使われる。部分空間では表せない制約条件の場合，一般にシステムは線形にはならない。

行列の値域と零核

- R^N または C^N を K^N で表す。
- (M, N)-行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，値域 $R(\boldsymbol{A})$ を次のように定義する。

$$R(A) = \{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in K^N\} \tag{L.142}$$

- (M, N)-行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，零核 $N(\boldsymbol{A})$ を次のように定義する。

$$N(A) = \{\boldsymbol{x} \in K^N | \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} \tag{L.143}$$

- 行列の値域および零核は，K^N の部分空間になる。

値域 $R(\boldsymbol{A})$ は $\boldsymbol{A}$ によって実現できるベクトルの全体である。したがって，$\boldsymbol{A}$ で変換した結果が $R(\boldsymbol{A})$ の外のベクトルになることはない。

零核 $N(\boldsymbol{A})$ は，変換すると $\mathbf{0}$ になってしまうベクトルの全体である。

行列の階数

- $\boldsymbol{A}$ の値域 $R(\boldsymbol{A})$ の次元を行列 $\boldsymbol{A}$ の階数 (rank，ランク) と呼び，rank($\boldsymbol{A}$) で表す。
- (M, N)-行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，$\boldsymbol{A}$ に含まれる 1 次独立な**列**ベクトルの最大数は，1 次独立な**行**ベクトルの最大数と等しい。
- 階数はこの 1 次独立な列または行ベクトルの最大数と一致する。
- また，転置行列の階数に関して次式が成立する。

$$\mathrm{rank}\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\boldsymbol{A}^T \tag{L.144}$$

1 次独立な列ベクトルの最大数 r と 1 次独立な行ベクトルの最大数 s が等しいことを，$s < r$ を仮定して，背理法で示す。

1. 列を並び替えても，列ベクトル，行ベクトルの独立性には関係しないため，$\boldsymbol{A}$ の第 1 列から第 r 列が独立になっているものとする。
2. N 個の列ベクトルの中から，r 個の 1 次独立な列ベクトルを取り出し，(M, r)-行列 $\boldsymbol{A}'$ を作成する。
3. $\boldsymbol{A}'$ の中の 1 次独立な行ベクトルの最大数を $s'(\leq s)$ とする。
4. 行を並び替えても，列ベクトル，行ベクトルの独立性には関係しないため，$\boldsymbol{A}$ の第 1 行から第 s' 行が，$\boldsymbol{A}'$ において，独立な s' 個の行ベクトルになっているものとする。
5. $\boldsymbol{A}'$ の中で $s'+1$ 個の行ベクトルは 1 次従属になるため，s' 個以外の行ベクトルは，s' 個の行ベクトルの 1 次結合で表すことができる。もちろん，s' 個の行ベクトルも s' 個の行ベクトルの 1 次結合で表すことをができるので，任意の $i = 1, 2, \ldots, M$，$j = 1, 2, \ldots, r$ に対して，

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{s'} \alpha_{ik} A_{kj}$$

となる α_{ik} が存在する。

6. $\boldsymbol{A}'$ からこの s' 個の行ベクトルを取り出した，

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s'1} & \cdots & A_{s'r} \end{pmatrix} \tag{L.145}$$

を考える。

7. この行列の r 個の列ベクトルは，$s'(< r)$ 次元空間に含まれるので，1 次独立になることはできない。したがって，0 でない値が存在するスカラーの組 β_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ が存在して，任意の $k = 1, 2, \ldots, s'$ に対して，次式が成立する。

$$\sum_{j=1}^{r} \beta_j A_{kj} = 0$$

8. このとき，任意の $i = 1, 2, \ldots, M$ に対して，次式が成立する。

$$\sum_{j=1}^{r} \beta_j A_{ij} = \sum_{j=1}^{r} \beta_j \sum_{k=1}^{s'} \alpha_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{s'} \alpha_{ik} \sum_{j=1}^{r} \beta_j A_{kj} = \sum_{k=1}^{s'} \alpha_{ik}\ 0 = 0$$

9. これは，r 個の列ベクトルが 1 次独立であるという仮定と矛盾する。

行列の階数と小行列式

行列 $\boldsymbol{A}$ の階数を r とする。

- $\boldsymbol{A}$ の中に r 次正方小行列で正則なものが存在する。
- $\boldsymbol{A}$ の $r+1$ 次正方行列はすべて正則でない。
- $\boldsymbol{A}$ の中に 0 でない，r 次小行列式が存在する。
- r 次の小行列式で 0 でないものが存在し，$r+1$ 次の小行列式がすべて 0 ならば，その階数は r である。

$\boldsymbol{A}$ の中の正則な r 次小正方行列は，上の証明で $s' = s = r$ となることより，$\boldsymbol{A}'$ から 1 次独立な r 個の行ベクトルを取り出して作った行列によって与えられる。

章末問題

1. 線形代数の演算の公理を使って，$(-1)\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の加法の逆元 $-\boldsymbol{x}$ になるになることを示せ。$\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{x}$ の加法の逆元であるとは，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ が成立することである。
2. 1 と同様に，任意のスカラー α に対して，$\alpha\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$ であることを示せ。
3. 内積の公理を使って，$\langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y} \rangle = \overline{\alpha}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ を証明せよ。
4. つぎの行列式を計算せよ。

$$(1)\ \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix}, \qquad (2)\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \qquad (3)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}, \qquad (3)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5. 成分が多項式である次の行列の逆行列を計算せよ

$$\begin{pmatrix} x+3 & 4 \\ 1 & x+2 \end{pmatrix}$$

6. 次の行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値と固有ベクトルを求め，$\boldsymbol{A}^n$，$e^{t\boldsymbol{A}}$ を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$