

## 章末問題の解答

L-1

任意のベクトル  $x$  に対して,

$$x + (-1)x = (1)x + (-1)x = (1 - 1)x = 0x = \mathbf{0}$$

となり,  $(-1)x$  が  $x$  の加法の逆元であることがわかる。

L-2

任意に選んだベクトル  $x$  に対して,  $0 = 0x$  と書くことができる。従って,

$$\alpha 0 = \alpha(0x) = (\alpha 0)x = 0x = \mathbf{0}$$

となり, ゼロベクトルになることがわかる。

L-3

任意のベクトル  $x, y$ , 任意のスカラー  $\alpha$  に対して,

$$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\langle \alpha y, x \rangle} = \overline{\alpha \langle y, x \rangle} = \bar{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$$

L-4

(1)

$$|3| = 3$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10$$

(3)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 2 \\ & = 12 + 4 + 6 - 2 - 24 - 6 = -10 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \\ & = 3 \cdot 3 - 1 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-10) = 22 \end{aligned}$$

L-5

$$\begin{pmatrix} x+3 & 4 \\ 1 & x+2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(x+3)(x+2) - 1 \cdot 4} \begin{pmatrix} x+2 & -4 \\ -1 & x+3 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2 + 5x + 2} \begin{pmatrix} x+2 & -4 \\ -1 & x+3 \end{pmatrix}$$

このような代数行列の逆行列の計算は，線形システムをラプラス変換で解析するときなどに使われる。

L-6

$$0 = \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 2 \\ 2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda + 1) - (-2) \cdot (-2) = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$$

従って， $\lambda_1 = 3$ ， $\lambda_2 = -2$ となる。

$\mathbf{u}_1 = (x_1, x_2)^T$ とおく。 $\lambda = \lambda_1$ のときは，方程式

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

は，

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となる。その解の1つとして， $\mathbf{u}_1 = (2, -1)^T$ をとる。同様に， $\lambda = \lambda_2$ のとき，

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

は，

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となる。その解の1つとして， $\mathbf{u}_2 = (1, 2)^T$ をとる。

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

とけば，

$$\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

となるので， $\mathbf{A}$ を対角化することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= \mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P})^n \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^n \mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 \cdot 3^n + (-2)^n & -2 \cdot 3^n + 2(-2)^n \\ -2 \cdot 3^n + 2(-2)^n & 3^n + 4(-2)^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}
 e^{\mathbf{A}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n = \mathbf{P} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P})^n \right] \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^n \right] \mathbf{P}^{-1} \\
 &= \mathbf{P} \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} 3^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-2)^n \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^3 + e^{-2} & -2e^3 + 2e^{-2} \\ -2e^3 + 2e^{-2} & e^3 + 4e^{-2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2-1

式(2.17)の $\alpha$ に $\alpha + \pi/2$ を代入すると,

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \cos \beta = \frac{1}{2} \left\{ \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta\right) + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta\right) \right\}$$

となり,  $\sin(\alpha + \pi/2) = \cos \alpha$  であるから,

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

と, 式(2.16)になる。

2-2

式(2.18)の $\alpha$ と $\beta$ に, それぞれ,  $\alpha + \pi/2$ と $\beta + \pi/2$ を代入すると,

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = 2 \sin \frac{\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta + \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{\alpha + \frac{\pi}{2} - \beta - \frac{\pi}{2}}{2}$$

となる。右辺は,

$$2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

となるから。

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

と, 式(2.20)になる。

2-3

ここでは, 角周波数 $\omega$ でなく周波数 $f$  ( $\omega = 2\pi f$ ) を使って表現する。LR 並列回路の電源電流のフェーザ表現は,

$$I = \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{2\pi i f L} \right) E = \left( 1 - i \frac{f_0}{f} \right) \frac{E}{R}$$

となる。ただし,  $f_0 = \frac{R}{2\pi L}$  はカットオフ周波数である。 $I$  を  $f$  の関数と考えて  $I(f)$  と記す。その振幅  $A = |I(f)|$  は以下ようになる。

$$|I(f)| = \sqrt{1 + \left( \frac{f_0}{f} \right)^2} \frac{|E|}{R}$$

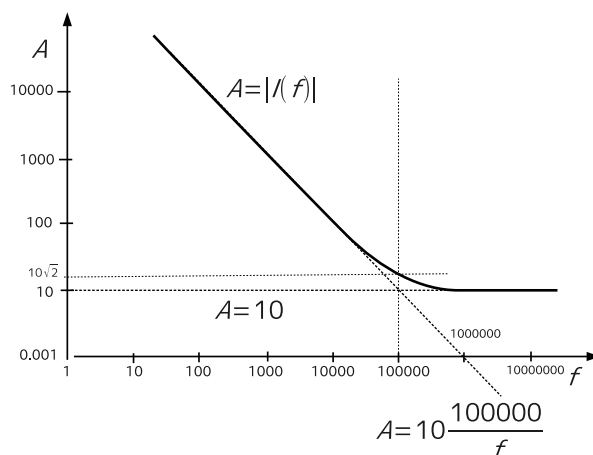
$f$  が  $f_0$  より十分小さい場合は，平方根の中の 1 を無視できるので，

$$|I(f)| \simeq \frac{f_0 |E|}{f R}$$

と近似することができる。この部分のグラフは，傾き  $-1$  で  $(f_0, \frac{|E|}{R})$  を通る直線となる。 $f$  が  $f_0$  より十分大きい場合は，

$$|I(f)| \simeq \frac{|E|}{R}$$

と近似することができる。この部分グラフは，傾き  $0$  で切片が  $\frac{|E|}{R}$  の直線となる。実際のグラフはこれをなめらかにつないだもので， $f = f_0$  で  $\frac{|E|}{R}$  から  $1/\sqrt{2}$  倍だけ低い点を通る。次のグラフは， $f_0 = 100000$ ， $\frac{|E|}{R} = 10$  のときの振幅図である。



LR 並列回路の電源電流の振幅図

CR 並列回路の電源電流のフェーザ表現は，

$$I = \left( \frac{1}{R} + 2\pi i f C \right) E = \left( 1 + i \frac{f}{f_0} \right) \frac{E}{R}$$

となる。ただし， $f_0 = \frac{1}{2\pi CR}$  はカットオフ周波数である。その振幅は以下ようになる。

$$|I(f)| = \sqrt{1 + \left( \frac{f}{f_0} \right)^2} \frac{|E|}{R}$$

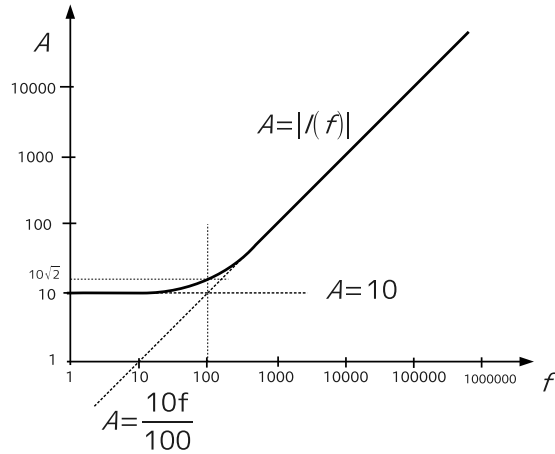
$f$  が  $f_0$  より十分小さい場合は，

$$|I(f)| \simeq \frac{|E|}{R}$$

と近似することができる。この部分グラフは，傾き  $0$  で切片が  $\frac{|E|}{R}$  の直線となる。 $f_0$  より十分大きい場合は，

$$|I(f)| \simeq \frac{f |E|}{f_0 R}$$

この部分のグラフは，傾き  $1$  で  $(f_0, \frac{|E|}{R})$  を通る直線となる。実際のグラフはこれをなめらかにつないだもので， $f = f_0$  で  $\frac{|E|}{R}$  から  $\sqrt{2}$  倍だけ高い点を通る。次のグラフは， $f_0 = 100000$ ， $\frac{|E|}{R} = 10$  のときの振幅図である。



CR 並列回路の電源電流の振幅図

2-4

フェーザ表現した CR 直列回路の電源電流は,

$$I = \frac{E}{R + \frac{1}{2\pi i f C}}$$

となる。電源電圧  $E$  に対する位相を求めるので,  $I/E$  の位相を求めればよい。分母を有理化すると,

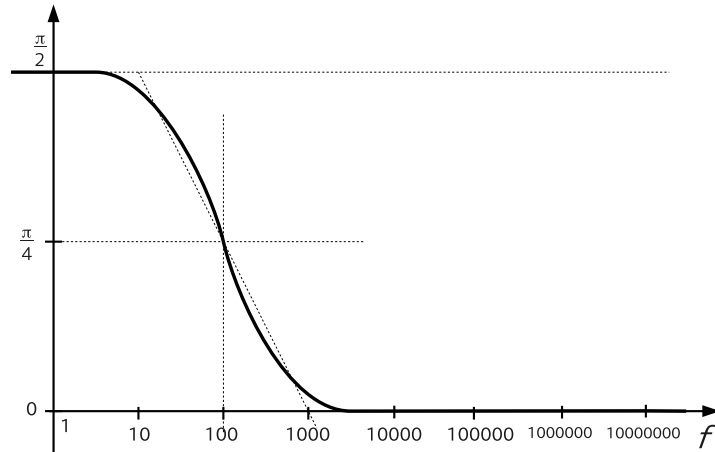
$$I/E = \frac{R + i\frac{1}{2\pi f C}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2}}$$

となる。 $f$  の関数として位相を  $\theta(f)$  と記す。この式より複素平面では  $I/E$  は第 1 象限に存在するため,  $\theta(f)$  は 0 から  $\frac{\pi}{2}$  の範囲を動く。従って,  $\tan^{-1}$  を使って表現することができる。

$$\theta(f) = \tan^{-1} \frac{\frac{1}{2\pi f C}}{R} = \tan^{-1} \frac{1}{2\pi f C R} = \tan^{-1} \frac{f_0}{f}$$

と書くことができる。ここで,  $f_0 = \frac{1}{2\pi C R}$

$f$  が  $f_0$  よりも十分小さい場合は  $\theta(f) \simeq \frac{\pi}{2}$ ,  $f$  が十分大きい場合は  $\theta(f) \simeq 0$ ,  $f = f_0$  のときには  $\theta(f) = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$  となる。また,  $f$  が  $f_0$  の 10 倍, 10 分の 1 の場合を考えれば, そのあたりでほぼ  $\frac{\pi}{2}$ , 0 に近づく。その 2 点を結んだ下書き線をなめらかにつなげて書けば良い。次のグラフは  $f_0 = 100$  のときの位相図である。



CR 直列回路の電源電流の位相図

上の計算では分母を有理化したが，分子が実数であるため，分母の位相の角度を  $-1$  倍するだけでよい。

## 2-5

フェーザ表現した LCR 直列回路の電流は，

$$I = \frac{E}{R + i \left( 2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC} \right)}$$

となる。電源電圧に対する位相  $\theta(f)$  は， $I/E$  の位相となる。分子が実数であるため分母の位相を  $-1$  倍すればよい。分母の位相は  $-\frac{\pi}{2}$  から  $\frac{\pi}{2}$  の範囲を動くため， $I/E$  の位相も  $-\frac{\pi}{2}$  から  $\frac{\pi}{2}$  の範囲を動く。従って， $\tan^{-1}$  を使って表現することができる。

$$\theta(f) = -\tan^{-1} \left( \frac{2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}}{R} \right)$$

となる。

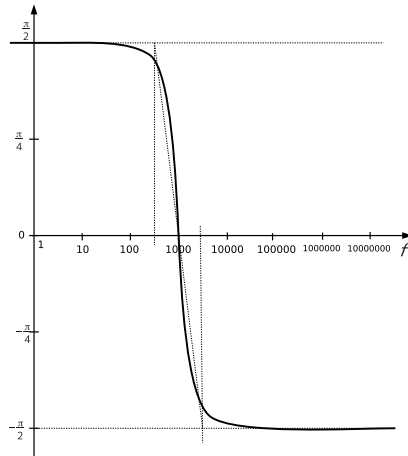
$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

とおけば ( $f_0$  は共振周波数)，

$$\theta(f) = -\tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{L}}{R\sqrt{C}} \left( \frac{f}{\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} - \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}f} \right) \right) = -\tan^{-1} \left( Q \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right)$$

となる。 $f$  が  $f_0$  よりも十分小さい場合は  $\theta(f) \simeq \frac{\pi}{2}$  となり，十分大きい場合は  $\theta(f) \simeq -\frac{\pi}{2}$  となり， $f = f_0$  の場合は  $\theta(f) \simeq 0$  となる。LR 回路や CR 回路とは異なり， $\tan^{-1}$  の中で， $f/f_0$  または  $f_0/f$  の片方を無視した場合でも，それらが  $Q$  倍されているため， $Q$  が 1 より大きい場合  $f = f_0$  付近の変化は急になる。すなわち，その付近のグラフの傾きの絶対値が大きくなる。

次のグラフは， $f_0 = 100$ ， $Q$  は 1 より大きいときの位相図である。



LCR 直列回路の電源電流の位相図

$Q$  が大きくなると,  $f = f_0$  で  $\pi/2$  から  $-pi/2$  へステップ的に位相が変化するが, このグラフでは,  $Q$  があまり大きくない場合の緩やかな変化で書いている。

2-6

フェーザ表現した  $V_L$  は,

$$V_L = \frac{2\pi i f L}{R + i \left( 2\pi f L - \frac{1}{2\pi f C} \right)} E$$

となる。  $V_L$  を  $f$  の関数と考えて  $V_L(f)$  と記す。  $f_0, Q$  を 2-5 と同様に定義すれば,

$$V_L(f) = \frac{i \frac{f}{1}}{2\pi\sqrt{LC}}}{R\sqrt{\frac{C}{L}} + i \left( \frac{f}{2\pi\sqrt{LC}} - \frac{2\pi\sqrt{LC}}{f} \right)} E = \frac{i \frac{f}{f_0}}{\frac{1}{Q} + i \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)} E$$

となる。従ってこの振幅は,

$$|V_L(f)| = \frac{\frac{f}{f_0}}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} + \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}} |E|$$

となる。  $f$  が  $f_0$  より十分小さい場合は, 分母の  $1/Q^2$  と  $f/f_0$  の項を無視して,

$$|V_L(f)| = \left( \frac{f}{f_0} \right)^2 |E|$$

と近似することができる。この部分のグラフは, 傾き 2 で  $(f_0, |E|)$  を通る直線となる。  $f_0$  より十分大きい場合は, 分母の  $1/Q^2$  と  $f_0/f$  の項を無視して,

$$|V_L(f)| \simeq |E|$$

と近似することができる。この部分グラフは, 傾き 0 で切片が  $|E|$  の直線となる。ただし,  $f = f_0$  の場合,

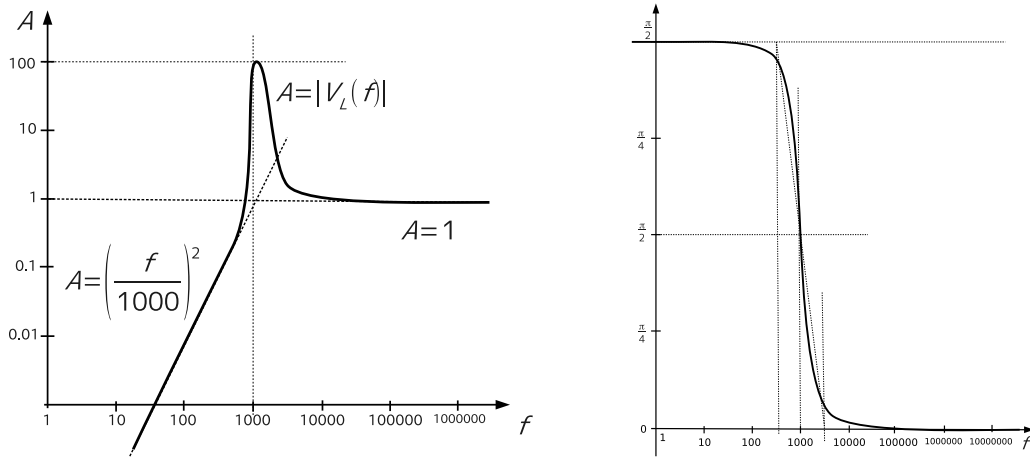
$$|V_L(f)| = Q|E|$$

となり、直線の交点より  $Q$  倍だけ上の点になる。また、電流の振幅  $|I(f)|$  と異なり、 $|V_L(f)|$  の分子の  $f$  の影響で、共振点  $f = f_0$  より少し高い周波数で  $Q|E|$  より少し大きな最大値をとるが、通常は共振点  $f = f_0$  を最大値  $Q|E|$  をとると近似して問題はない。このように、電源電圧よりも高い電圧が生じることは、電源回路の破壊や人的危険性につながる可能性があるため注意すべき点となる。下の左のグラフは、 $f_0 = 100$ 、 $Q = 100$  の場合の振幅図である。 $V_L$  の振幅の最大値は電源の振幅のおよそ 100 倍になっている。

位相図は  $V_L = 2\pi iLI$  より、 $V_L$  は  $I$  を実数倍を除いて  $i$  倍しただけであるので、 $V_L$  の位相は電流の位相より  $\pi/2$  だけ進んだ ( $\pi/2$  を加算した) ものになる。これは、5-5 の解答で説明するが、 $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$  が成立するため、

$$\arg(iz) = \arg(i) + \arg(z) = \frac{\pi}{2} + \arg(z)$$

が成立するからである。下の右のグラフは、 $f_0 = 100$ 、 $Q$  は 1 より大きい (それほど大きくない) ときの位相図である。



### 3-1

まず、実数表現でフーリエ級数展開する。

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2\pi} [1]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos ntdt \\ &= \frac{1}{\pi n} [\sin nt]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin \frac{n}{2} - \sin \frac{-n}{2}}{\pi n} = \frac{2 \sin \frac{n}{2}}{\pi n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \sin ntdt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin ntdt \\ &= \frac{1}{\pi n} [-\cos nt]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{\cos \frac{n}{2} - \cos \frac{-n}{2}}{\pi n} = 0 \end{aligned}$$

が成立する。従って、フーリエ級数展開は次式ようになる。

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \frac{n}{2}}{\pi n} \cos nt$$



複素数表現でフーリエ級数展開する。

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-int} dt \\ &= \frac{1}{2\pi(-in)} [e^{-int}]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\frac{e^{-\frac{in}{2}} - e^{\frac{in}{2}}}{2\pi in} = \frac{\sin \frac{n}{2}}{\pi n} \end{aligned}$$

が成立する。従って、フーリエ級数展開は次式のようになる。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{n}{2}}{\pi n} e^{int}$$

ただし、 $|\theta| \ll 1$  のとき、 $\sin \theta \simeq \theta$  であるから、 $n = 0$  で

$$\frac{\sin \frac{n}{2}}{n} = \frac{1}{2}$$

としている。

### 3-2

$X(\omega)$  で  $x(t)$  のフーリエ変換を表す。

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t)e^{-i\omega t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{-i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i(\omega-1)t} + \frac{1}{2}e^{-i(\omega+1)t}\right) dt \\ &= \left[ \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} + \frac{1}{2} \frac{e^{-i(\omega-1)t}}{-i(\omega-1)} + \frac{1}{2} \frac{e^{-i(\omega+1)t}}{-i(\omega+1)} \right]_{t=-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{e^{i\pi\omega} - e^{-i\pi\omega}}{i\omega} + \frac{1}{2} \frac{e^{i\pi(\omega-1)} - e^{-i\pi(\omega-1)}}{i(\omega-1)} + \frac{1}{2} \frac{e^{i\pi(\omega+1)} - e^{-i\pi(\omega+1)}}{i(\omega+1)} \\ &= \frac{2 \sin \pi\omega}{\omega} + \frac{\sin \pi(\omega-1)}{\omega-1} + \frac{\sin \pi(\omega+1)}{\omega+1} = 2\pi \frac{\sin \pi\omega}{\pi\omega} + \pi \frac{\sin \pi(\omega-1)}{\pi(\omega-1)} + \pi \frac{\sin \pi(\omega+1)}{\pi(\omega+1)} \\ &= 2\pi \text{sinc } \omega + \pi \text{sinc } (\omega-1) + \pi \text{sinc } (\omega+1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\text{sinc}$  は  $\sin x/x$  で定義される関数である。この関数に関しては、6.2 節を参照すること。

### 3-3

$\text{sinc } t$  のフーリエ変換  $S(\omega)$  は、式 (6.4)、(6.5) より、

$$S(\omega) = \begin{cases} \pi & (|\omega| \leq 1) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

となる。フーリエ変換可能な任意の関数  $g(t)$  のフーリエ変換を  $G(\omega)$  で表せば、 $g(at)$  のフーリエ変換は、 $\tau = at$  とおけば  $dt = \frac{1}{a}d\tau$  となるので、

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(at)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)e^{-i(\omega/a)\tau} d\tau = \frac{1}{a} G\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

となる。これより， $\text{sinc}(2t)$  と  $\text{sinc}(3t)$  のフーリエ変換は，それぞれ，

$$\begin{cases} \pi/2 & (|\omega| \leq 2) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}, \quad \begin{cases} \pi/3 & (|\omega| \leq 3) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

となる。この積は，

$$\begin{cases} \pi^2/6 & (|\omega| \leq 2) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

となる。これは  $\text{sinc}(2t)$  のフーリエ変換を  $\pi/3$  倍したものであるから， $\text{sinc}(2t)$  と  $\text{sinc}(3t)$  の畳み込み積分は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2(t-\tau))\text{sinc}(3\tau)d\tau = \frac{\pi}{3}\text{sinc}(2t)$$

となる。

4-1

(a) 式 (4.41) より，

$$\frac{1}{s-1}$$

となる。直接計算しても，

$$\int_0^{\infty} e^t e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-1)t} dt = \frac{1}{-(s-1)} [e^{-(s-1)t}]_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-(s-1)} = \frac{1}{s-1}$$

となる。 $t \rightarrow \infty$  の値を 0 としているが，これは  $s$  の実部に任意に条件を課すことができるため，ここでは  $\text{Re}(s) > 1$  という条件を与えたため成立するものである。

(b) 式 (4.45) より，

$$\frac{2}{s^2+2^2} = \frac{2}{s^2+4}$$

となる。

(c) 式 (4.46) より，

$$\frac{s}{s^2+3^2} = \frac{s}{s^2+9}$$

となる。

(d) 式 (4.21) より，単位ステップ関数を 4 倍したもののラプラス変換の微分のマイナスになるから，

$$-\frac{d}{ds} \frac{4}{s} = \frac{4}{s^2}$$

となる。式 (4.48) から計算できる。

(e) 式 (4.21) より， $e^{2t}$  のラプラス変換の微分のマイナスになるから，

$$-\frac{d}{ds} \frac{1}{s-2} = \frac{1}{(s-2)^2}$$

となる。

(f) 式 (4.21) より,  $e^{3t}$  のラプラス変換の 2 階微分になるから,

$$-\frac{d}{ds} \left( -\frac{d}{ds} \frac{1}{s-3} \right) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{(s-3)^2} = \frac{2}{(s-3)^3}$$

となる。

(g) 式 (4.21) より,  $\cos 3t$  のラプラス変換の微分のマイナスになるから,

$$-\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2+9} = -\frac{(s^2+9) - s(2s)}{(s^2+9)^2} = \frac{s^2-9}{(s^2+9)^2}$$

となる。

(h) 式 (4.26) より,  $\sin 2t$  のラプラス変換の  $s$  を  $s+3$  に変えたものになるから,

$$\frac{2}{(s+3)^2+2^2} = \frac{2}{s^2+6s+13}$$

となる。

#### 4-2

まず, 部分分数展開で解く。

$$F(s) = \frac{-s^2 - 5s + 20}{(s^2+4)(s+3)^2} = \frac{as+b}{s^2+4} + \frac{c}{s+3} + \frac{d}{(s+3)^2}$$

とおくと,

$$\begin{aligned} & \frac{as+b}{s^2+4} + \frac{c}{s+3} + \frac{d}{(s+3)^2} \\ &= \frac{(as+b)(s+3)^2 + c(s+3)(s^2+4) + d(s^2+4)}{(s^2+4)(s+3)^2} \\ &= \frac{1}{(s^2+4)(s+3)^2} \{ (a+c)s^3 + (6a+b+3c+d)s^2 + (9a+6b+4c)s + (9b+12c+4d) \} \end{aligned}$$

となるので, 次の連立方程式が成立する。

$$\begin{cases} a+c = 0 \\ 6a+b+3c+d = -1 \\ 9a+6b+4c = -5 \\ 9b+12c+4d = 20 \end{cases}$$

これを解くと,  $a = -1, b = 0, c = 1, d = 2$  となる。従って,

$$F(s) = -\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s+3} + \frac{2}{(s+3)^2}$$

となるので,

$$f(t) = -\cos 2t + e^{-3t} + 2te^{-3t}$$

となる。

留数定理で解く。 $F(s)$  には,  $s = \pm 2i$  に 1 位の極,  $s = -3$  に 2 位の極, が存在する。  
従って,

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{s \rightarrow 2i} (s - 2i)F(s)e^{st} + \lim_{s \rightarrow -2i} (s + 2i)F(s)e^{st} + \lim_{s \rightarrow -3} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d}{ds} (s+3)^2 F(s)e^{st} \\ &= \lim_{s \rightarrow 2i} \frac{-s^2 - 5s + 20}{(s+2i)(s+3)^2} e^{st} + \lim_{s \rightarrow -2i} \frac{-s^2 - 5s + 20}{(s-2i)(s+3)^2} e^{st} + \lim_{s \rightarrow -3} \frac{d}{ds} \left( -1 + \frac{-5s+24}{s^2+4} \right) e^{st} \\ &= \frac{-(2i)^2 - 5(2i) + 20}{4i(2i+3)^2} e^{2it} + \frac{-(-2i)^2 - 5(-2i) + 20}{(-4i)(-2i+3)^2} e^{-2it} \\ &\quad + \lim_{s \rightarrow -3} \left\{ \frac{-5(s^2+4) - (-5s+24)2s}{(s^2+4)^2} e^{st} + \left( -1 + \frac{-5s+24}{s^2+4} \right) t e^{st} \right\} \\ &= \frac{(24-10i)(3-2i)^2 e^{2it} - (24+10i)(3+2i)^2 e^{-2it}}{(4+9)^2(4i)} \\ &\quad + \frac{-5(9+4) - (15+24)(-6)}{(9+4)^2} e^{-2t} + \left( -1 + \frac{15+24}{9+4} \right) t e^{-2t} \\ &= \frac{\{(120-120) - (288-50)i\} e^{2it} - \{(120-120) + (288-50)i\} e^{-2it}}{13^2(4i)} \\ &\quad + \frac{-5+18}{13} e^{-2t} + (-1+3)t e^{-2t} \\ &= -2i \frac{e^{2it} + e^{-2it}}{4i} + e^{-3t} + 2te^{-3t} \\ &= -\cos 2t + e^{-3t} + 2te^{-3t} \end{aligned}$$

となる。

5-1

状態変数をラプラス変換したものは, 次のようになる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s+1 & -2 \\ 1 & s+4 \end{pmatrix}^{-1} \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+4)+2} \begin{pmatrix} s+4 & 2 \\ -1 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+2)^2(s+3)} \begin{pmatrix} 2(s+4)(s+2)+2 \\ -2(s+2)+(s+1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+2)^2(s+3)} \begin{pmatrix} 2(s+3)^2 \\ -(s+3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2(s+3)}{(s+2)^2} \\ \frac{-1}{(s+2)^2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$X_1(s)$  の答えを部分分数展開すると,

$$\frac{2}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2}$$

となる。この逆ラプラス変換は,  $2e^{-2t} + 2te^{-2t}$  となる。従って, 時間関数としての状態は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} + 2te^{-2t} \\ -te^{-2t} \end{pmatrix}$$

出力をラプラス変換したものは,

$$\begin{aligned} Y(s) &= (2, 0) \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{pmatrix} + (-1, 0) \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} \\ &= (2, 0) \begin{pmatrix} \frac{4(s+3)}{(s+2)^2} \\ \frac{-1}{(s+2)^2} \end{pmatrix} + (-1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{4(s+3)}{(s+2)^2} \end{aligned}$$

となる。従って, 時間関数としての出力  $y(t)$  は次式のようになる。

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{(2-1)!} \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} (s+2)^2 \frac{4(s+3)}{(s+2)^2} e^{st} \\ &= \lim_{s \rightarrow -2} 4[s^{st} + (s+3)te^{st}] \\ &= 4e^{-2t} + 4te^{-2t} \end{aligned}$$

## 5-2

可制御行列は,

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

となり, この行列式は 5 であるのでランクが 3 となり, 可制御である。

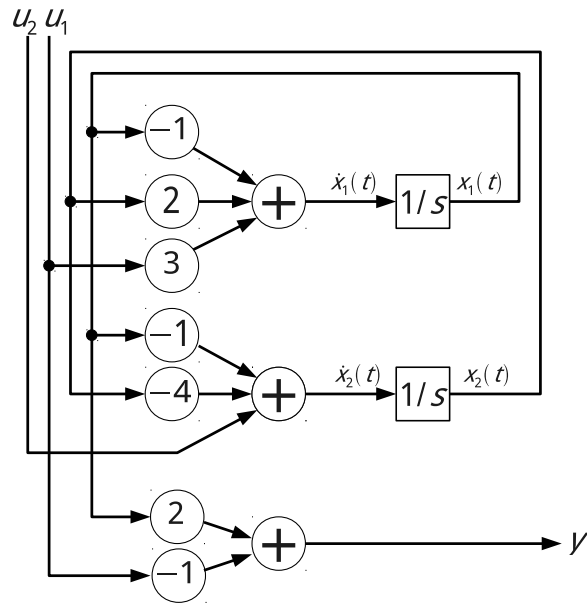
可観測行列は,

$$\left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

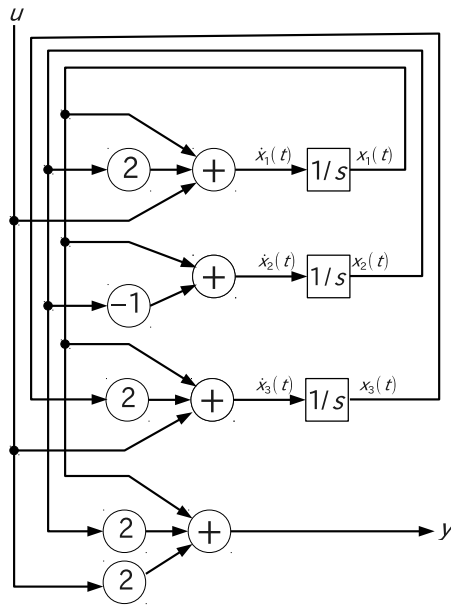
となり, この行列式は 0 で, ランクが 3 とはならないため可観測でない。

## 5-3

5-1 の線形システムのブロック線図は以下の通りである。



5-2の線形システムのブロック線図は以下の通りである。



5-4

フルビッツ行列は,

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。その主座小行列式は，

$$H_1 = \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 3 > 0 \quad (1)$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7 > 0 \quad (2)$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 0 + 0 - 9 - 4 = 5 > 0 \quad (3)$$

$$H_4 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 > 0 \quad (4)$$

(5)

となる。係数はすべて正で，フルビッツ行列の主座小行列式もすべて正であるため，すべての解の実部は負である。

#### 5-5

角周波数を使って説明する。周波数表示した開ループ伝達関数  $A(\omega)$  にするためには， $s$  に  $i\omega$  を代入すれば良い。従って，

$$A(\omega) = \frac{10^9}{(i\omega + 1)(i\omega + 1000)^2}$$

となる。開ループ伝達関数の振幅は，

$$|A(\omega)| = \frac{10^9}{\sqrt{\omega^2 + 1}(\omega^2 + 1000000)}$$

となる。従って，この振幅図は， $\omega$  が 1 よりも十分小さいときは， $\omega = 0$  とおいて，

$$|A(\omega)| \simeq 1000$$

となり，傾き 0，高さが 1000 の直線となる。 $\omega$  が 1 から 1000 の間では， $\sqrt{\omega^2 + 1}$  において 1 を無視し， $\omega^2 + 1000000$  において  $\omega = 0$  とおいて，

$$|A(\omega)| \simeq \frac{1000}{\omega}$$

となり，傾き -1 で (1, 1000) を通る直線となる。 $\omega$  が 1000 よりも十分大きいと，

$$|A(\omega)| \simeq \frac{10^9}{\omega^3}$$

となり，傾き -3 で (1000, 1) を通る直線となる。

位相は，分母を有理化して，有理化した分母を無視すれば，

$$\theta = \arg(-i\omega + 1)(i\omega + 1000)^2 = \arg(-i\omega + 1) + 2\arg(i\omega + 1000)$$

となる。(一般に,  $z_1, z_2$  を複素数とすれば,

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

が成立する。これは,

$$|z_1 z_2| e^{i \arg(z_1 z_2)} = z_1 z_2 = |z_1| e^{i \arg(z_1)} |z_2| e^{i \arg(z_2)} = |z_1 z_2| e^{i(\arg(z_1) + \arg(z_2))}$$

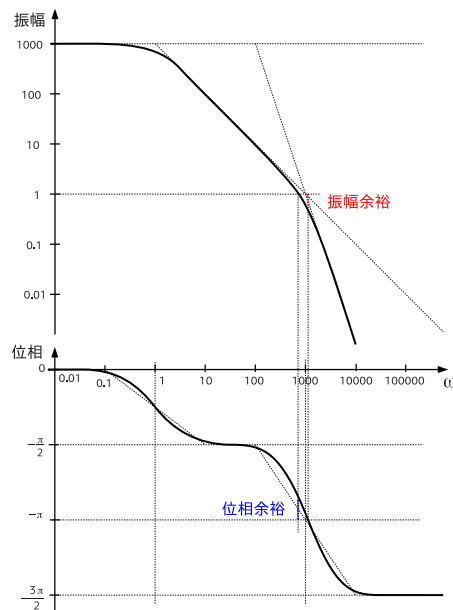
より明らかである。)

また,  $\tan^{-1}$  を使って書けば, 次のようになる。

$$\theta = -\tan^{-1} \omega - 2 \tan^{-1} \frac{\omega}{1000}$$

従って,  $\arg(-i\omega + 1)$  は LR 回路の位相のように,  $\omega = 1$  付近で 0 から  $-\pi/2$  へ変わる。 $\omega = 1$  での位相は  $-\pi/4$  である。 $\arg(-i\omega + 1000)$  も同様に,  $\omega = 1000$  付近で 0 から  $-\pi/2$  へ変わる。 $\omega = 1000$  での位相は  $-\pi/4$  である。従って, 開ループ伝達関数の位相図の概形は,  $\omega \leq 1/10$  で 0,  $1/10 \leq \omega \leq 10$  で 0 から  $-\pi/2$  に変化し,  $\omega = 1$  ではほぼ  $-\pi/4$  となる ( $2 \arg(i\omega + 1000)$  の影響のため「ほぼ」となる)。そして,  $100 \leq \omega \leq 10000$  で  $-\pi/2$  から  $-3\pi/2$  に変化し,  $\omega = 1000$  ではほぼ  $-\pi$  となる ( $\arg(i\omega + 1)$  の影響のため「ほぼ」となる)。それより高い周波数では, 位相は  $-3\pi/2$  で一定となる。

この振幅図と位相図をまとめたものを次に示す。

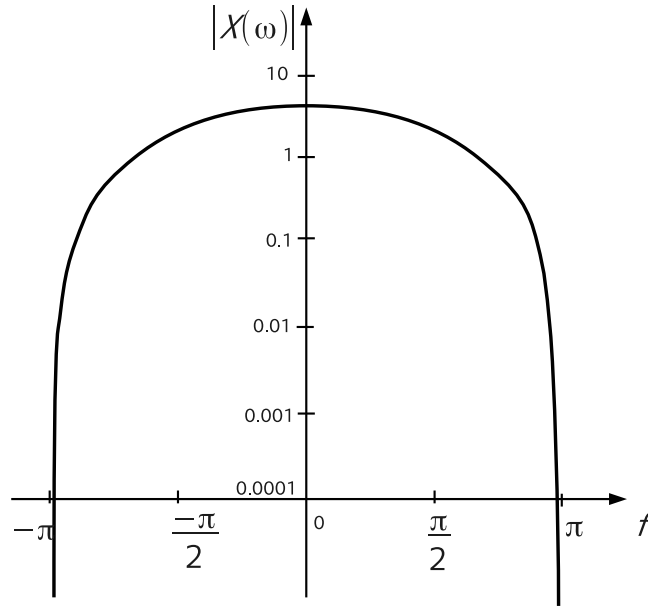


図からみてわかるようにあまり振幅余裕・位相余裕がない。数値的に計算すると, 開ループ伝達関数の振幅が 1 となる角周波数は  $\omega = 682.313$  である。このときの位相は  $-2.766$  rad で, 位相余裕は  $-\pi$  との差で 0.375 である。また, 開ループ伝達関数の位相が  $-\pi$  となる角周波数は  $\omega = 1001.00871$  である。このときの開ループ伝達関数の振幅は 0.499 となり, 振幅余裕は 2 倍程度となる。



$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega n} = e^{-i\omega} + 2 + e^{i\omega} = 2(1 + \cos \omega)$$

となる。 $|X(\omega)|$  をグラフにすると、 $\omega = 0$  で  $|X(\omega)|$  が最大値 4 をとる。 $|X(\omega)| = 1$  となる場合は  $\cos \omega = -0.5$  で  $\omega = 2\pi/3$  となる。 $|X(\omega)| = 0.1$  となる場合は  $\cos \omega = -0.95$  で  $\omega \simeq 2.83$ 、 $|X(\omega)| = 0.01$  となる場合は  $\cos \omega = -0.995$  で  $\omega \simeq 3.04$  となる。これらの情報を使ってグラフを書くと下図のようになる。



## 6-2

$$y_T(n) = \begin{cases} x_T(n) & (0 \leq n \leq N-1) \\ x_T(2N-1-n) & (N \leq n \leq 2N-1) \end{cases} \quad (6)$$

で定義された  $y_T(n)$  を長さ  $2N$  の離散フーリエ変換 (DFT) したものを  $Y(m)$  とする。すなわち、

$$Y(m) = \sum_{n=0}^{2N-1} y_T(n) e^{-\frac{2\pi i}{2N} mn} \quad (7)$$

$$y_T(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N-1} Y(m) e^{\frac{2\pi i}{2N} mn} \quad (8)$$

が成立する。いま、 $Y'(m) = Y(m) \frac{1}{2} e^{-\frac{2\pi i}{2N} m \frac{1}{2}}$  とおけば、

$$Y'(m) = \sum_{n=0}^{2N-1} y_T(n) e^{-\frac{2\pi i}{2N} m(n+\frac{1}{2})} \quad (9)$$

$$y_T(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N-1} Y'(m) e^{\frac{2\pi i}{2N} m(n+\frac{1}{2})} \quad (10)$$

という変換と逆変換を考えることができる。ここで、式(9)で加算される項の $n$ に $2N-1-n$ を代入すれば、

$$y_T(2N-1-n)e^{-\frac{2\pi i}{2N}m(2N-1-n+\frac{1}{2})} = y_T(n)e^{\frac{2\pi i}{2N}m(n+\frac{1}{2})} \quad (11)$$

となる。式(10)の和を0から $N-1$ と $N$ から $2N-1$ に分け、式(11)の対称性を後者の和に用いれば、0から $N-1$ の和になるので、

$$Y'(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x_T(n) \cos \frac{\pi}{N} m \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (12)$$

が成立する。式(12)より、 $Y'(m)$ はすべて実数である。

式(10)で、 $y(n)$ も $Y'(m)$ も実数であり、複素数の指数関数項の $\sin$ 関数の項は消えるはずであるから、

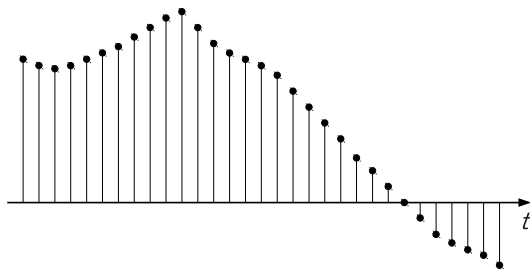
$$y_T(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N-1} Y'(m) \cos \frac{\pi}{N} m \left( n + \frac{1}{2} \right)$$

が成立する。式(12)より、 $Y'(2N-m) = Y'(m)$ と $Y'(N) = 0$ が成立するから、 $0 \leq n < N$ で、

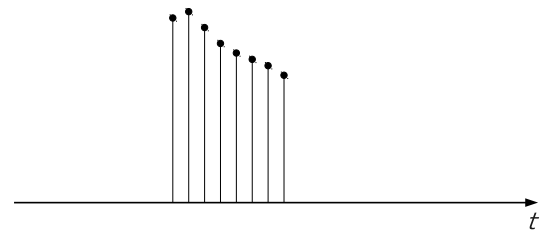
$$x_T(n) = y_T(n) = \frac{1}{N} Y'(0) + \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N-1} Y'(m) \cos \frac{\pi}{N} m \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (13)$$

が成立する。式(12)と(13)が、離散コサイン変換(DCT)とその逆変換を表している。

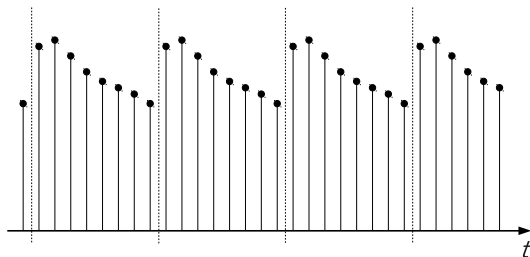
DCTは画像符号化などに使われているが、下図を使ってこのDCTの工学的な意味を説明する。



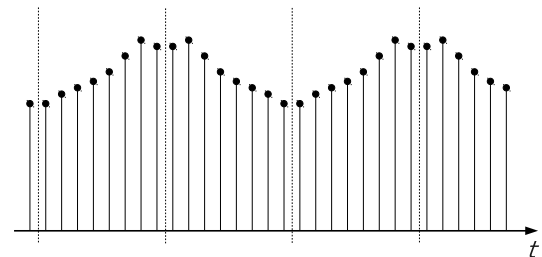
(a) 原信号



(b) 切り出した信号



(c) DFTの周期信号



(d) DCTの周期信号

処理する信号の長さは、図(a)のように一般にはかなり長い。長いままでは処理が難しいため、図(b)のように切り出して使うことが多い。このとき、DFTで処理すると図(c)のような繰り返し信号を扱っていることになり、右端と左端の値の違いにより、実際には存在しない信号の不連続が生まれ、高周波成分が現れることになる。このとき、DCT

を使えば図 (d) のような繰り返しを考えるため，不連続が生じることなく，不要な高周波成分が現れないため，効率的な処理が可能になる。折り返す方法により DCT は複数通り存在するが，ここで示した DCT-II と呼ばれる変換は画像符号化などで実際に使われている。

### 6-3

(a) 式 (6.41) より，

$$\frac{z}{z - e}$$

となる。

(b) 式 (6.43) より，

$$\frac{z \sin 2}{z^2 - 2z \cos 2 + 1}$$

(c) 式 (6.44) より，

$$\frac{z(z - \cos 3)}{z^2 - 2z \cos 2 + 1}$$

(d)

一般に， $x_T(n)$  を  $z$  変換したものを  $X(z)$  とおけば， $nx_T(n)$  を  $z$  変換したものは，次のようになる。

$$(-z) \frac{d}{dz} X(z)$$

これは， $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_T(n) z^{-n}$  を  $z$  で微分して得られる式

$$\frac{d}{dz} X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-n) x_T(n) z^{-n-1}$$

の両辺に  $-z$  をかけて得られる。従って， $n$  の  $z$  変換は，

$$(-z) \frac{d}{dz} \frac{z}{z - 1} = (-z) \frac{z - 1 - z}{(z - 1)^2} = \frac{z}{(z - 1)^2}$$

となる。

(e) (d) と同様にして，

$$(-z) \frac{d}{dz} \frac{z}{z - e^2} = (-z) \frac{z - e^2 - z}{(z - e^2)^2} = \frac{e^2 z}{(z - e^2)^2}$$

(f) (d) で行ったことを 2 回繰り返して，

$$(-z) \frac{d}{dz} \left( (-z) \frac{d}{dz} \frac{z}{z - e^3} \right) = (-z) \frac{d}{dz} \frac{e^3 z}{(z - e^3)^2} = (-z) \left( \frac{e^3}{(z - e^3)^2} - \frac{2e^3 z}{(z - e^3)^3} \right) = \frac{e^3 z(z + e^3)}{(z - e^3)^3}$$

(g) (b) と (c) より,

$$(-z) \frac{d}{dz} \frac{z(z - \cos 3)}{z^2 - 2z \cos 2 + 1} = \frac{z \cos 3(z^2 + 1)}{(z^2 - 2z \cos 2 + 1)^2}$$

となる。

(h)

一般に,  $x_T(n)$  を  $z$  変換したものを  $X(z)$  とおけば,  $e^{\alpha n} x_T(n)$  を  $z$  変換したものは,  $X(e^{-\alpha} z)$  となる。これは, 次式から得られる。

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha n} x_T(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} x_T(n) (e^{-\alpha} z)^{-n} = X(e^{-\alpha} z)$$

したがって, (b) より,

$$\frac{(e^3 z) \sin 2}{(e^3 z)^2 - 2(e^3 z) \cos 2 + 1} = \frac{z \sin 2}{e^3 z^2 - 2z \cos 2 + e^{-3}}$$

となる。

#### 6-4

$X(z)z^{n-1}$  の留数を計算すればよい。  $n = 0$  のとき, 極は  $z = 0, z = 1/4, z = 1/2$  にある 1 位の極だけである。従って,

$$\begin{aligned} x(0) &= \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{-z-1}{z(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})} + \lim_{z \rightarrow 1/4} \left(z - \frac{1}{4}\right) \frac{-z-1}{z(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})} \\ &\quad + \lim_{z \rightarrow 1/2} \left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{-z-1}{z(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{-1}{(-\frac{1}{4})(-\frac{1}{2})} + \frac{-\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})} + \frac{-\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})} \\ &= -8 - 20 + 12 = 0 \end{aligned}$$

$n \geq 1$  のとき, 極は  $z = 1/4, z = 1/2$  にある 1 位の極だけである。

$$\begin{aligned} x(n) &= \lim_{z \rightarrow 1/4} \left(z - \frac{1}{4}\right) \frac{-z-1}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})} z^{n-1} + \lim_{z \rightarrow 1/2} \left(z - \frac{1}{2}\right) \frac{-z-1}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{2})} z^{n-1} \\ &= \frac{-\frac{1}{4}-1}{(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \frac{-\frac{1}{2}-1}{(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 5 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

まとめると以下のようになる。

$$x(n) = \begin{cases} 0 & (n = 0) \\ 5 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - 6 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & (n \geq 1) \end{cases}$$

7-1

入力を  $z$  変換した  $U(z)$  は，次のようになる。

$$U(z) = z^{-1}$$

状態変数を  $z$  変換したものは次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{pmatrix} &= z \begin{pmatrix} z-1 & 1 \\ -1 & z+\frac{3}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z-1 & 1 \\ -1 & z+\frac{3}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} U(z) \\ &= \frac{1}{(z-1)(z+\frac{3}{2})+1} \begin{pmatrix} z+\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & z-1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{(z+1)(z-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} z+\frac{3}{2} & -1 \\ 1 & z-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{z^2+1}{z} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(z+\frac{3}{2})(z^2+1)}{z(z+1)(z-\frac{1}{2})} \\ \frac{(z^2+1)}{z(z+1)(z-\frac{1}{2})} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って，出力を  $z$  変換した  $Y(z)$  は，次のようになる。

$$\begin{aligned} Y(z) &= (1, 1) \begin{pmatrix} X_1(z) \\ X_2(z) \end{pmatrix} + 2U(z) \\ &= \frac{(z+\frac{5}{2})(z^2+1) + 2(z+1)(z-\frac{1}{2})}{z(z+1)(z-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 2z + \frac{3}{2}}{z(z+1)(z-\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

逆  $z$  変換する。 $y(n)$  は，上式に  $z^{n-1}$  をかけたものの留数和となる。 $n \geq 2$  のとき，極は  $z = -1$  と  $z = \frac{1}{2}$  に 1 位の極があるだけである。従って，

$$\begin{aligned} y(n) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 2z + \frac{3}{2}}{z(z+1)(z-\frac{1}{2})} z^{n-2} + \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left( z - \frac{1}{2} \right) \frac{z^3 + \frac{9}{2}z^2 + 2z + \frac{3}{2}}{z(z+1)(z-\frac{1}{2})} z^{n-2} \\ &= \frac{((-1)^3 + \frac{9}{2}(-1)^2 + 2(-1) + \frac{3}{2})(-1)^{n-2}}{(-1-\frac{1}{2})} + \frac{\left( (\frac{1}{2})^3 + \frac{9}{2}(\frac{1}{2})^2 + 2(\frac{1}{2}) + \frac{3}{2} \right) (\frac{1}{2})^{n-2}}{\frac{1}{2} + 1} \\ &= 2(-1)^{n-1} + 5 \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。 $n = 0$  のときは，次のようになる。

$$y(0) = (1, 1) \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} + 2 \cdot u(0) = 1$$

$n = 1$  のときは，

$$\begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より,

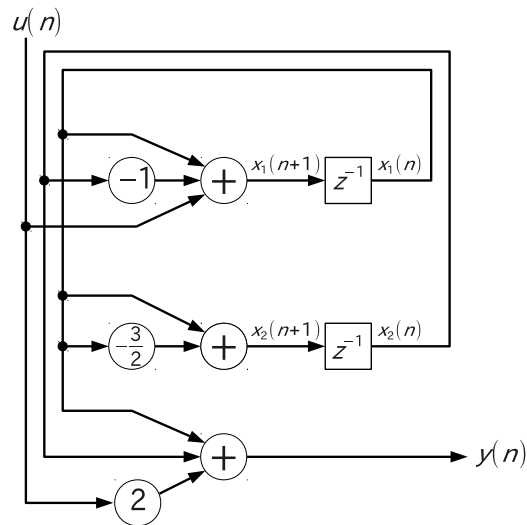
$$y(1) = (1, 1) \begin{pmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{pmatrix} + 2 \cdot u(1) = 4$$

となる。まとめれば, 以下のようになる。

$$y(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 4 & (n = 1) \\ 2(-1)^{n-1} + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & (n \geq 2) \end{cases}$$

7-2

下図のようになる。ここで  $z^{-1}$  とかかっている四角が遅延器である。



7-3

可制御行列は,

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。この行列は正則であるから, 可制御である。

可観測行列は,

$$\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

となる。この行列は正則であるから, 可観測である。

7-4

双 1 次変換を行うと,

$$g_1(s) \equiv 4 \left( \frac{1+s}{1-s} \right)^3 + 2 \left( \frac{1+s}{1-s} \right) - 1 = 0$$

となる。この分子となる多項式からなる方程式

$$g_2(s) = 4(1+s)^3 + 2(1+s)(1-s)^2 - (1-s)^3 = 7s^3 + 7s^2 + 13s + 5 = 0$$

の解の実数部分が負であることを示せばよい。このフルビッツ行列は、

$$H = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 7 & 13 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

となる。多項式の係数がすべて正であり、その主座小行列式

$$H_1 = \begin{vmatrix} 7 \end{vmatrix} = 7 > 0,$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} = 56 > 0,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 7 & 13 & 0 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 13 \cdot 5 - 7 \cdot 5 \cdot 5 = 280 > 0$$

がすべて正であるので、その解の実数部分はすべて負である。従って、 $g(z) = 0$  の解の絶対値は1未満となる。